Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2019/20
7. November 2019

Lineare Algebra 1
Prof. Dr. Annette Werner
Dr. Tobias Schedlmeier

Übungsblatt 4

Abgabe bis Donnerstag, 14.11.2019 um 12 Uhr

Aufgabe 1. (4 Punkte)

a) *Beweisen Sie, dass für die Determinante einer* 3×3*-Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

gilt:

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Diese Formel nennt man Regel von Sarrus.

b) *Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1/2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

c) *Zeigen Sie, dass* A *und* B *aus Teilaufgabe b) invertierbar sind und bestimmen Sie* A^{-1} *und* B^{-1}.

b.w.

Aufgabe 2. (4 Punkte) *Es sei V die folgende $n \times n$-Matrix über $\mathbb{R}$:*

$$V := \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

a) *Beweisen Sie, dass*

$$det(V) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

b) *Wann ist V invertierbar? Berechnen Sie für $n = 3$ in diesem Fall die inverse Matrix V^{-1} .*

Aufgabe 3. (4 Punkte) *Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ sind die Determinanten der folgenden Matrizen Null? Begründen Sie Ihre Antwort.*

a) $A = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 9 & -3 & -\lambda-2 \end{pmatrix}$,

b) $B = \begin{pmatrix} k\lambda & k+1 \\ k & 2\lambda - k \end{pmatrix}$ *für ein $k \in \mathbb{R}$.*

Aufgabe 4. (4 Punkte) *Betrachten Sie die folgende $n \times n$-Matrix über $\mathbb{R}$:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $det(A) = n + 1$ ist.