GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Stochastische Numerik
SS 2019
Prof. Dr. Thomas Gerstner

Übung 3

Abgabe bis Mittwoch, 12.6.2019

Aufgabe 1:
Transformieren Sie die Ito SDE

$$dX_t = e^{-X_t}\,dt + X_t\,dW_t$$

in eine Stratonovich SDE, sowie die Stratonovich SDE

$$dX_t = \cos(X_t)\,dt + \big(\sin(X_t) + t^2\big) \circ dW_t$$

in eine Ito SDE.

Aufgabe 2:
Sei $T > 0$ und sei $\{W_t, t \geq 0\}$ ein Wiener Prozess. Zeigen Sie

$$\int_0^T t\,dW_t = T\,W_T - \int_0^T W_t\,dt$$

mit Hilfe der Definition des Ito-Integrals.

Aufgabe 3:
Sei $f : [t_0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $\sup_{t\in[0,T],x\in\mathbb{R}} \left|\left(\frac{\partial}{\partial x} f\right)(t,x)\right| < \infty$. Zeigen Sie, dass f global Lipschitz-stetig in x ist und zeigen Sie, dass aus der Lipschitz-Stetigkeit eine lineare Wachstumsbeschränkung für f in x folgt.

Aufgabe 4:
Das stochastische Euler-Verfahren ist gegeben durch

$$X_{n+1} = X_n + f(t_n, X_n)\Delta + g(t_n, X_n)\Delta W_n$$

für $n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$. Implementieren Sie dieses Verfahren und berechnen Sie jeweils einen Pfad der Lösung der SDE

$$dX_t = \alpha X_t\,dt + \beta X_t\,dW_t$$

für $t \in [0, 1]$, $X_0 = 1$ und Schrittweite $\Delta = 10^{-3}$ für die Parameter

a) $\alpha = 1$, $\beta = 0.1$,

b) $\alpha = 1$, $\beta = 1$,

c) $\alpha = 1$, $\beta = 10$.

Stellen Sie diesen Pfad jeweils graphisch dar.