

Übung 5

Abgabe bis Donnerstag, 29.11., 11:45 Uhr

Aufgabe 1: [Orthogonalitätsrelation]

Für ein festes $N > 0$ betrachten wir die Punkte $x_k := -\pi + 2\pi k/N$, $0 \leq k < N$, und definieren die Vektoren $\omega_j := (\omega_0^j, \omega_1^j, \dots, \omega_{N-1}^j) \in \mathbb{C}^N$ für $0 \leq j < N$, wobei $\omega_j := \exp(ix_j)$. Zeigen sie, dass diese Vektoren die folgende Orthogonalitätsrelation

$$(\omega_j, \omega_k) := \sum_{l=0}^{N-1} \omega_l^j \omega_l^{-k} = \begin{cases} N & \text{für } j = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

erfüllen.

Punkte: 6

Aufgabe 2: [Diskrete Fourier-Transformation]

Es bezeichne $F_N f$ die diskrete Fouriertransformierte von f , wobei $N = 2^M$ und $M \in \mathbb{N}$. Zur Vereinfachung der Notation wird $F_N f$ per $(F_N f)_k = (F_N f)_{k+N}$ periodisch fortgesetzt. Zeigen sie, dass gilt:

- (a) Für $f \in \mathbb{C}^N$ gilt $(\overline{F_N f})_k = (F_N \overline{f})_{N-k}$.
- (b) Für $f \in \mathbb{R}^N$ folgt insbesondere $(\overline{F_N f})_k = (F_N f)_{N-k}$.
- (c) Für $f \in \mathbb{R}^N$ ist die direkte Berechnung von $F_N f$ ineffizient, da die verschwindenden Imaginärteile mitgeführt werden. Besser ist es, die Fouriertransformation für den Vektor

$$g \in \mathbb{C}^{N/2}, \quad g_k = f_{2k} + i f_{2k+1}$$

der halben Länge durchzuführen. Zeigen sie, dass man dann $F_N f$ über

$$(F_N f)_k = \frac{(F_{N/2} g)_k + (\overline{F_{N/2} g})_{N/2-k}}{4} + e^{2\pi i k/N} \frac{(F_{N/2} g)_k - (\overline{F_{N/2} g})_{N/2-k}}{4i}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

erhält. (Wegen (b) genügt es sogar, nur die Hälfte von $(F_N f)$ abzuspeichern.)

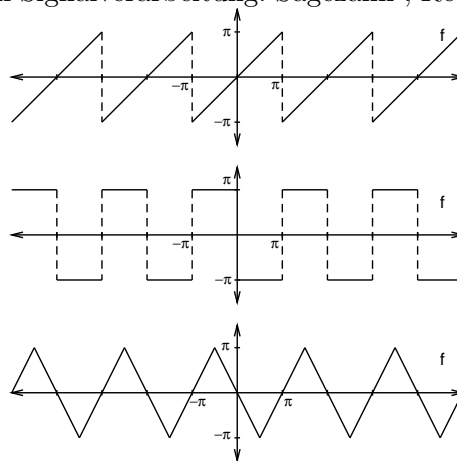
Punkte: 12

Aufgabe 3: [Programmieraufgabe]

Schreiben sie die folgenden Programme:

- (a) Schreiben sie eine Funktion $DFT(f)$ mit $f = (f_0, f_1, \dots, f_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, welche die diskrete Fourier-Transformation einer reellen, periodischen Funktion, die im Intervall $[-\pi, \pi)$ an $n = 2^k$ Punkten $(x_j, f_j), 0 \leq j < n$, mit $x_j = -\pi + 2\pi j/n$ gegeben ist, bestimmt.
- (b) Programmieren sie die entsprechende inverse diskrete Fourier-Transformation $IDFT(c)$ mit $c = (c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ und testen sie die IDFT am Vektor c mit Einträgen $c_j = e^{ij\pi/2}$ für $j = 0, \dots, 3$.
- (c) Überprüfen sie mit ihren Funktionen die Gleichung $IDFT(DFT(f)) = f$ am Vektor $f = (0, 0, 1, 1, 0, 0, -1, -1)$.

Betrachten sie als Beispiele die (neben der Sinus- und Kosinusschwingung) wichtigsten Schwingungstypen der analogen und digitalen Signalverarbeitung: Sägezahn-, Rechteck- und Dreieck-Schwingung:



- (d) Ermitteln sie die diskreten Fourier-Koeffizienten für diese drei Beispiele für $k = 0, 2, 4$ und 6 mit dem Programm aus (a).

Punkte: 14