

Lineare Algebra

Wintersemester 2018/19

Übungsblatt 3

30. Oktober 2018

Aufgabe 1. (6 = 2+4 Punkte)

- (a) Sei M die Menge der Teilnehmenden an den Übungen zur Linearen Algebra. Auf M definieren wir eine Relation \sim durch

$$x \sim y :\iff x \text{ und } y \text{ sind in der gleichen Übungsgruppe angemeldet.}$$

Zeigen Sie, dass es sich um eine Äquivalenzrelation handelt. Was sind die Äquivalenzklassen?

- (b) Entscheiden Sie für die folgenden Relationen auf \mathbb{Z} jeweils, ob sie reflexiv, symmetrisch und transitiv sind. Beweisen Sie gegebenenfalls die Eigenschaft, oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.
- (i) $x \sim y :\iff x \neq y$
 - (ii) $x \sim y :\iff x \leq y$
 - (iii) $x \sim y$ für alle $x, y \in \mathbb{Z}$
 - (iv) $x \sim y :\iff xy \geq 0$

Aufgabe 2. (5 = 1,5+1+1+1,5 Punkte)

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Sei die Relation \sim auf X definiert durch

$$x \sim y :\iff f(x) = f(y).$$

- (a) Zeigen Sie, dass \sim eine Äquivalenzrelation ist.
- (b) Zeigen Sie, dass die Vorschrift $[x] \mapsto f(x)$ eine injektive Abbildung $\bar{f} : X/\sim \rightarrow Y$ definiert.
- (c) Folgern Sie, dass die Abbildung

$$\tilde{f} : X/\sim \xrightarrow{\sim} f(X), \quad [x] \mapsto f(x)$$

bijektiv ist und zeigen Sie, dass $f = i \circ \tilde{f} \circ \pi$ gilt, wobei $\pi : X \rightarrow X/\sim$ die Quotientenabbildung und $i : f(X) \hookrightarrow Y$ die Inklusion des Bildes von f ist.

- (d) Beschreiben Sie die Bijektion $X/\sim \xrightarrow{\sim} f(X)$ für die Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.

Aufgabe 3. (3=1+1+1 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt: $10^k \equiv 1 \pmod{9}$.
- (b) Die Quersumme $Q(n)$ einer natürlichen Zahl n ist definiert als die Summe seiner Ziffern im Dezimalsystem. Zeigen Sie, dass $n \equiv Q(n) \pmod{9}$ gilt.
- (c) Ist die Zahl $111 \dots 1$ mit 2018 Ziffern durch 9 teilbar?

Aufgabe 4. (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass es keine ganzen Zahlen a und b gibt, für die gilt:

$$3a^2 = b^2 + 1.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Gleichung modulo 3.

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **6. November 2018**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

https://www.uni-frankfurt.de/73427229/19_18_WS_Lineare_Algebra
