Übungen zur Vorlesung Algebra I

Übungsblatt 12

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya 18.01.2016
Übungen: M. Nickel

Übung 1 (4 Punkte)
Sei L/K ein Körpererweiterung und seien E, F Zwischenkörper, die über K endlich sind. Zeigen Sie:
Wenn E/K galoisch ist, dann ist auch EF/F galoisch und die Einschränkungsabbildung

$$\begin{aligned} r : \mathrm{Gal}(EF/F) &\to \mathrm{Gal}(E/E \cap F) \\ \sigma &\mapsto \sigma|_E \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus von Gruppen.

Übung 2 (4 Punkte)
Bestimmen Sie die Galoisgruppe der galoisschen Hülle von $\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}})/\mathbb{Q}$ und von $\mathbb{Q}(\sqrt{3+\sqrt{3}})/\mathbb{Q}$.

Übung 3 (4 Punkte)
Sei Ω/K eine Körpererweiterun, L/K ein endlicher galoisscher Zwischenkörper und E ein weiterer beliebiger Zwischenkörper. Wir setzen $F = EL$ in Ω für das Kompositum von E und L. Zeigen Sie

(a) F/E ist endlich galoissch und die Abbildung $\sigma \mapsto \sigma|_L$ ist ein injektiver Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{res}_L^F : \mathrm{Gal}(F/E) \to \mathrm{Gal}(L/K)\,.$$

(b) Bestimmen Sie das Bild von res_L^F und beschreiben Sie den dazugehörigen Fixkörper.

(c) Zeigen Sie, dass $[F : E]$ ein Teiler von $[L : K]$ ist.

(d) Finden Sie ein Gegenbeispiel zu (c), wenn L/K nicht galoissch ist.

Übung 4 (4 Punkte)
Sei M/K ein Körpererweiterung und L_1, L_2 Zwischenerweiterungen, die über K endlich und galoissch sind. Sei $L = L_1L_2$ das Kompositum in M. Zeigen Sie, dass L/K galoissch ist und

$$\begin{aligned} \mathrm{res} : \mathrm{Gal}(L/K) &\to \mathrm{Gal}(L_1/K) \times \mathrm{Gal}(L_2/K) \\ \sigma &\mapsto (\sigma|_{L_1}, \sigma|_{L_2}) \end{aligned}$$

ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist. Bestimmen Sie außerdem das Bild.
Tipp: Betrachten Sie $L_{12} = L_1 \cap L_2$ und nutzen Sie das **Faserprodukt** von Gruppen.

Das ist für Gruppen G_1, G_2 zusammen mit Gruppenhomomorphismen $\varphi_i : G_i \to G_{12}$ für $i = 1, 2$ die Untergruppe

$$G_1 \times_{G_{12}} G_2 := \{(a_1, a_2) \in G_1 \times G_2 \mid \varphi_1(a_1) = \varphi_2(a_2)\}$$

von $G_1 \times G_2$. (Die Homomorphismen φ_1, φ_2 gehören zur Definition dazu, fallen aber bei der Notation üblicherweise weg.)

Präsenzaufgaben
Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.

Übung 5
Zeigen Sie, dass $\mathrm{PGL}_2(K)$ durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot [u : v] = [au + bv : cu + dv]$$

scharf 3-fach transitiv auf $\mathbb{P}^1(K)$ operiert. Folgern Sie Isomorphismen

$$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_2) \cong S_3$$

und

$$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3) \cong S_4 \,.$$

Zusatzaufgaben *Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.*

Übung 6
Zeigen Sie, dass die Quaternionengruppe Q_8 nur auf eine einzige Art als transitive Permutationsgruppe auftritt.

Dieses Blatt kann bis spätestens **12:00 Uhr** am **Montag, den 25.01.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutoren im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben und alle Blätter, zum Beispiel mit einem Schnellhefter, zusammen zu halten.