



Bachelorarbeit

Streifeldberechnungen zur
Mikro-Hall-Magnetometrie

von

Christian Paul Renzel

geboren am 23. März 1992 in Limburg an der Lahn

vorgelegt am Fachbereich Physik
der Goethe Universität Frankfurt am Main

im Februar 2015

Wissenschaftliche Arbeit im Rahmen der Bachelorprüfung des Fachbereiches Physik der Goethe Universität Frankfurt am Main

Verfasser: Christian Paul Renzel
Rosenstraße 11
65611 Brechen

Gutachter: Prof. Dr. Jens Müller
Prof. Dr. Michael Lang

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	4
1 Grundlagen	6
1.1 Magnetismus	6
1.1.1 Magnetische Anisotropie	7
1.1.2 Magnetische Domänen	7
1.1.3 (Um-)Magnetisierungsprozesse	9
1.1.4 Stoner-Wohlfarth-Modell	11
1.2 Mikro-Hall-Magnetometrie	13
1.2.1 Hall-Effekt	13
1.2.2 Zweidimensionales Elektronengas (2DEG)	14
1.2.3 Transporteigenschaften	17
2 MicMag	20
2.1 Analytische Streufeldberechnungen	20
2.1.1 Magnetische Streufelder	21
2.1.2 Erläuterungen zur Funktionsweise	25
2.2 Auswertung von <i>OOMMF</i> -Simulationsdaten	27
2.2.1 OOMMF	27
2.2.2 Erläuterungen zum Funktionsweise	29
2.2.3 Auswertung einer kompletten Hystereseschleife	31
3 Anwendungen	33
3.1 Hall-Spannung für verschiedene Positionen	33
3.2 Messempfindlichkeit eines Hall-Sensors	35
3.3 Magnetisches Spin-Ice	38
3.4 Vergleich von Magnetisierung und Hall-Spannung	44
4 Zusammenfassung und Ausblick	47
5 Anhang	49
Literaturverzeichnis	51
Danksagung	52
Erklärung	53

Einleitung

Die Untersuchung magnetischer Materialien stellt ein wichtiges Gebiet der Festkörperphysik dar, aus dem sich in der Vergangenheit zahlreiche technische Anwendungen solcher Materialien ergeben hat. Insbesondere ferromagnetische Materialien, wie sie in dieser Arbeit untersucht werden, stellen ein großes Anwendungspotenzial dar; ohne diese Materialien wäre zum Beispiel die moderne Festplattentechnik auf Basis des GMR-Effektes nicht denkbar.

Die Untersuchung der magnetischen Eigenschaften erweist sich jedoch oftmals als schwierig: Eine Untersuchung mit Hilfe von Röntgenstrahlung ist nicht ohne Weiteres möglich, da Photonen im Allgemeinen kein magnetisches Moment aufweisen und somit nicht mit dem magnetischen Gitter wechselwirken. Neutronenstreuung stellt einen recht aufwendigen Weg dar, um einen Festkörper auf seine magnetischen Eigenschaften zu untersuchen. Allerdings werden bei dieser Methode makroskopische Proben benötigt. Gerade für technische Anwendungen in Form von elektronischen Bauteilen, ist die Untersuchung von magnetischen Nanostrukturen interessant, die sich mittels Neutronenstreuung nicht mehr untersuchen lassen.

Eine weitere Möglichkeit, um die magnetischen Eigenschaften von Festkörpern zu studieren, bietet das Abrastern der Oberfläche mit Hilfe einer magnetischen Cantilever-Spitze, die sogenannte magnetische Raster-Kraft-Mikroskopie (MFM, engl. magnetic force microscopy). Die Messung bei variabler Temperatur kann hier allerdings zeitaufwendig werden, da die Probe in jedem Zustand komplett abgerastert werden muss. Desweiteren sind Messungen bei variablem äußeren Magnetfeld schwierig zu realisieren.

Die Methode, die Gegenstand dieser Arbeit ist, ist die *Mikro-Hall-Magnetometrie*: Unter Ausnutzung des Hall-Effektes soll von der Hall-Spannung auf die Magnetisierung der Probe zurückgeschlossen werden. Ziel der Arbeit ist es ein Programm vorzustellen, das genutzt werden kann, um

- Simulationsergebnisse an Messdaten anzupassen,
- die optimale Probenposition auf dem Sensor zu bestimmen und
- einfache Abschätzungen bezüglich der zu erwartenden Hall-Spannung zu machen.

Dazu können analytische Lösungen des magnetischen Streufeldes, sowie Simulationsergebnisse des Programmes *OOMMF* herangezogen werden.

Der Inhalt dieser Arbeit gliedert sich wie folgt: Im ersten Kapitel wird ein Überblick über die notwendigen Grundlagen bezüglich des (Ferro-)Magnetismus gegeben, bevor auf die Messmethode der Mikro-Hall-Magnetometrie näher eingegangen wird. Anschließend wird das im Rahmen dieser Arbeit entstandene Programm *MicMag* grundlegend erläutert, mit dem die Streufeldberechnungen durchgeführt wurden. Zuletzt werden die Ergebnisse des Programms anhand einiger Experimente verifiziert: Es wird unter anderem der Frage nachgegangen, inwiefern die gemessene Hall-Spannung der Probenmagnetisierung entspricht und in welchen Fällen die beiden Größen voneinander abweichen. Desweiteren wird die Empfindlichkeit des Sensors untersucht mit Blick auf eine mögliche Optimierung der Größe und Position der aktiven Fläche.

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Magnetismus

Die zwei wichtigsten Größen zur Beschreibung eines magnetischen Streufeldes sind die magnetische Feldstärke B in Tesla und die magnetische Flussdichte H in $\frac{A}{m}$ [1]. Im Vakuum sind diese beiden Größen lediglich über die Naturkonstante μ_0 ($= 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2}$) verknüpft:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (1.1)$$

Befindet sich das Streufeld jedoch nicht im Vakuum, so ändern die Elektronen in dem umgebenden Medium ihre Bahnbewegung, was eine Verstärkung oder Abschwächung zur Folge hat. Die Größe, die die Reaktion des Festkörpers auf das äußere Feld beschreibt, ist die magnetische Suszeptibilität χ , die aufgrund der Anisotropie des Festkörpers als Tensor vorliegt. Im Falle einer Verstärkung ($\chi > 0$) spricht man von paramagnetischem, bei einer Abschwächung ($\chi < 0$) von diamagnetischem Verhalten. Der Beitrag des Festkörpers zum magnetischen Feld wird Magnetisierung \vec{M} genannt, die sich mikroskopisch betrachtet aus der Summe der magnetischen Momente aller Atome pro Volumen ergibt. Für einen Festkörper, in dem die magnetischen Momente untereinander nicht wechselwirken, ist die Magnetisierung immer proportional zum äußeren Feld, mit der magnetischen Suszeptibilität als Proportionalitätskonstante:

$$\vec{M} = \frac{\vec{m}}{V} = \frac{1}{V} \sum_{i=0}^N \vec{\mu}_i = \hat{\chi} \vec{H} \quad (1.2)$$

In Gleichung 1.1 wird der Beitrag des Festkörpers folgendermaßen berücksichtigt:

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(1 + \chi)\vec{H} \quad (1.3)$$

Der Faktor $\mu_r = (1 + \chi)$ wird als magnetische Permeabilität bezeichnet und wird wie die Suszeptibilität verwendet, um einen Festkörper hinsichtlich seiner magnetischen Eigenschaften zu charakterisieren.

Die im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Materialien zeigen ferromagnetisches Verhalten, das durch eine spontane parallele Ausrichtung der magnetischen Momente unterhalb der materialspezifischen Curie-Temperatur T_C gekennzeichnet ist. Es liegt nahe, dass diese spontane Magnetisierung auf eine starke Wechselwirkung zwischen den magnetischen Momenten der Atome zurückzuführen

ist, die oberhalb der Curie-Temperatur von der thermischen Unordnung dominiert wird, das heißt der Festkörper wird paramagnetisch.

Das Verhalten unterhalb der Curie-Temperatur lässt sich offensichtlich nicht mehr durch den linearen Zusammenhang in Gleichung (1.2) beschreiben, da auch ohne äußeres Feld eine Magnetisierung vorliegt. Für ferromagnetische Materialien treten Hystereseschleifen auf, deren Eigenschaften und Ursachen im Folgenden näher erläutert werden.

1.1.1 Magnetische Anisotropie

Ferromagnete weisen im Allgemeinen magnetisch leichte und schwere Achsen auf. Als magnetisch leichte Achse bezeichnet man die Achse, entlang derer die Magnetisierung bevorzugt stattfindet. Um die Richtung der Magnetisierung aus dieser Achse herauszudrehen, muss Energie z. B. in Form eines äußeren Feldes aufgebracht werden.

Die Anisotropieenergie $E_{Anisotropie}$ bezeichnet hierbei die Energie, die benötigt wird, um die Magnetisierung einer Probe von der magnetisch leichten in die magnetisch schwere Achse zu drehen:

$$E_{Anisotropie} = E_{Magnetokristallin} + E_{Form} + E_{Induziert} \quad (1.4)$$

Im Wesentlichen besteht die Anisotropieenergie aus drei Termen, wobei für dünne Schichten noch die Grenzflächenanisotropie berücksichtigt werden muss:

- Kristalle sind im Allgemeinen anisotrope Medien; dies beeinflusst auch die Wechselwirkung der magnetischen Momente. Der Beitrag zur Anisotropieenergie wird daher als **magnetokristalline Anisotropie** bezeichnet.
- Die **Formanisotropie** resultiert aus der Probengeometrie, da die magnetischen Dipole an der Oberfläche weniger nächste Nachbarn besitzen. Dementsprechend unterliegen diese Dipole einer geringeren Austauschwechselwirkung und besitzen Anteile, die der Magnetisierungsrichtung entgegengerichtet sind. Das damit verbundene Feld wird als Entmagnetisierungsfeld bezeichnet.
- Die **induzierte Anisotropie** beruht auf elastischen Verspannungen und Unregelmäßigkeiten in der chemischen Zusammensetzung des Ferromagneten.

Neben der magnetischen Anisotropie sind für das Verständnis von Hystereseschleifen auch Kenntnisse der Eigenschaften von magnetischen Domänen erforderlich, die das Verhalten der magnetischen Momente innerhalb des Festkörpers bestimmen [2, 3].

1.1.2 Magnetische Domänen

Die spontane Magnetisierung lässt vermuten, dass alle magnetischen Momente innerhalb eines Ferromagneten auch ohne äußeres Magnetfeld parallel gerichtet sind, was als Sättigungsmagnetisierung bezeichnet wird. Bei makroskopischen Proben zeigt sich jedoch, dass eine kleine Anzahl von Bezirken vorliegt, innerhalb

derer die magnetischen Momente parallel ausgerichtet sind, während die magnetischen Momente verschiedener Bezirke in unterschiedliche Richtungen zeigen können. Diese Regionen wurden erstmals 1906 von Pierre-Ernest Weiss beschrieben und werden als Weissche Bezirke oder magnetische Domänen bezeichnet. Der Übergang zwischen zwei Bezirken erfolgt kontinuierlich über wenige Atomlagen hinweg und wird als Domänenwand bezeichnet [4].

Ferromagnetische Festkörper bilden Domänenstrukturen aus, da diese die magnetische Feldenergie reduzieren. In Abb. 1.1 ist für den eindomänigen Zustand ein sehr ausgeprägtes Streufeld zu sehen; die zugehörige Feldenergie ist dementsprechend groß. Das Ausbilden von Domänenwänden und die damit verbundene Drehung der magnetischen Momente kostet Energie, reduziert aber wie in Abb. 1.1 (b) und (c) dargestellt ist, das äußere Feld. Domänenstrukturen stellen also einen Kompromiss aus Wandenergie und Feldenergie dar, bei dem die freie Energie minimal wird (mit $e = \frac{E}{V}$). Dieser Zustand ist in Abb. 1.1 (d) dargestellt:

$$\mathcal{F} = \int_{Probe} e_{Anisotropie} + e_{Feld} + e_{Wand} dV \quad (1.5)$$

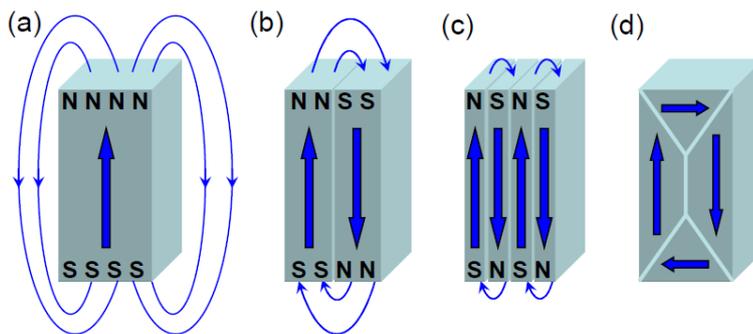


Abbildung 1.1: Darstellung der Weisschen Bezirke und des zugehörigen Streufeldes für den eindomänigen (gesättigten) (a), mehrdomänigen (b) und (c) und den energetisch günstigsten (d) Zustand. Entnommen aus [5].

Hierbei wurde angenommen, dass kein äußeres Feld an den Ferromagneten angelegt wurde, das heißt, dass eine Minimierung der Freien Energie auf den Grundzustand des Festkörpers führt. Desweiteren wird deutlich, dass die Gesamtmagnetisierung der Probe deutlich geringer ist als die Sättigungsmagnetisierung, da sich die Beiträge verschiedener Domänen teilweise kompensieren.

Domänenwände haben eine endliche Ausdehnung, da die Drehung eines magnetischen Moments bezüglich seines nächsten Nachbarn Energie in Abhängigkeit des Drehwinkels kostet. Es wird zwischen zwei Arten von Domänenwänden unterschieden [4]:

- Eine Domänenwand wird als Bloch-Wand bezeichnet, wenn sich die magnetischen Momente in einer Ebene parallel zu der Wand drehen (siehe Abb. 1.2 rechts).

- Drehen sich die Momente senkrecht zur Domänenwand, so spricht man von einer Néel-Wand. Diese tritt, aufgrund der fehlenden Nachbarn an der Oberfläche der Probe, hauptsächlich bei dünnen Schichten auf (siehe Abb. 1.2 links).

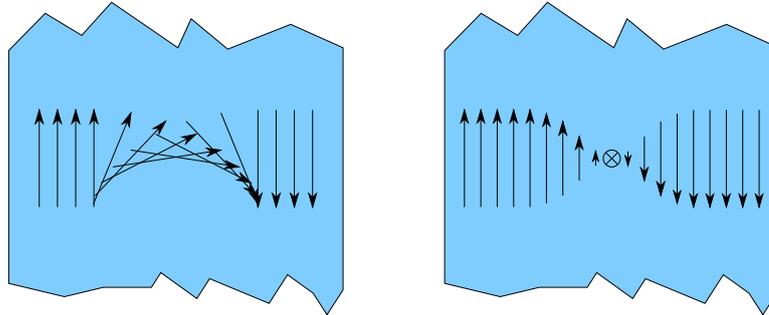


Abbildung 1.2: Darstellung einer Bloch- und einer Néel-Wand. Die Pfeile geben die Richtung der Magnetisierung an, die sich innerhalb der Domänenwand um 180° dreht.

Kleine Proben

Für die meisten makroskopischen Proben erweisen sich Zustände wie in Abb. 1.1(d) als energetisch günstig. Bei kleinen Proben hingegen wird die Wandenergie im Vergleich zur Formanisotropieenergie sehr groß. Dies liegt daran, dass die Wandenergie im Wesentlichen ein Oberflächenterm ist $E_{Wand} \sim r^2$ und die Formanisotropieenergie von dem Volumen der Probe abhängt $E_{Form} \sim r^3$. Es existiert also eine kritische Probengröße, unterhalb derer nur eindomänige Zustände auftreten. Eine Abschätzung nach Blundell für eine kugelförmige Eisenprobe ergibt für den kritischen Radius $R_c \sim 10^{-7}m$ [4].

1.1.3 (Um-)Magnetisierungsprozesse

Für para- und diamagnetische Materialien ist die Magnetisierung nach Gleichung 1.2 über die Proportionalitätskonstante χ mit dem äußeren Feld verknüpft. Ferromagnete zeigen beim Anlegen eines äußeren Magnetfeldes kein lineares Verhalten, sondern einen hystereseähnlichen Verlauf.

In einem entmagnetisierten Ferromagneten (Abb. 1.3 (a)), der größer als die kritische Probengröße ist, liegen die bereits beschriebenen Weisschen Bezirke vor, sodass die magnetische Feldenergie minimal und die Gesamtmagnetisierung null ist. Beim Anlegen eines äußeren Feldes wachsen die Domänen, deren Magnetisierungsrichtung entlang des äußeren Feldes zeigt, auf Kosten der Domänen, die eine andere Magnetisierungsrichtung aufweisen. Dieser Effekt wird als Domänenwandbewegung bezeichnet und ist in Abb. 1.3 (b) dargestellt. Die Bewegungen sind bei kleinen äußeren Feldern noch reversibel, ab einer gewissen Feldstärke lässt sich der ursprüngliche, entmagnetisierte Zustand jedoch nicht wiederherstellen. Desweiteren können metallurgische Verunreinigungen zu einem kurzzeitigen Festhalten und anschließendem Sprung der Domänenwände führen,

was als Domänenwand-Pinning bzw. Barkhausen-Sprung bezeichnet wird. In der Hysteresekurve macht sich dieser Effekt als sprunghafte Magnetisierungsänderung bemerkbar.

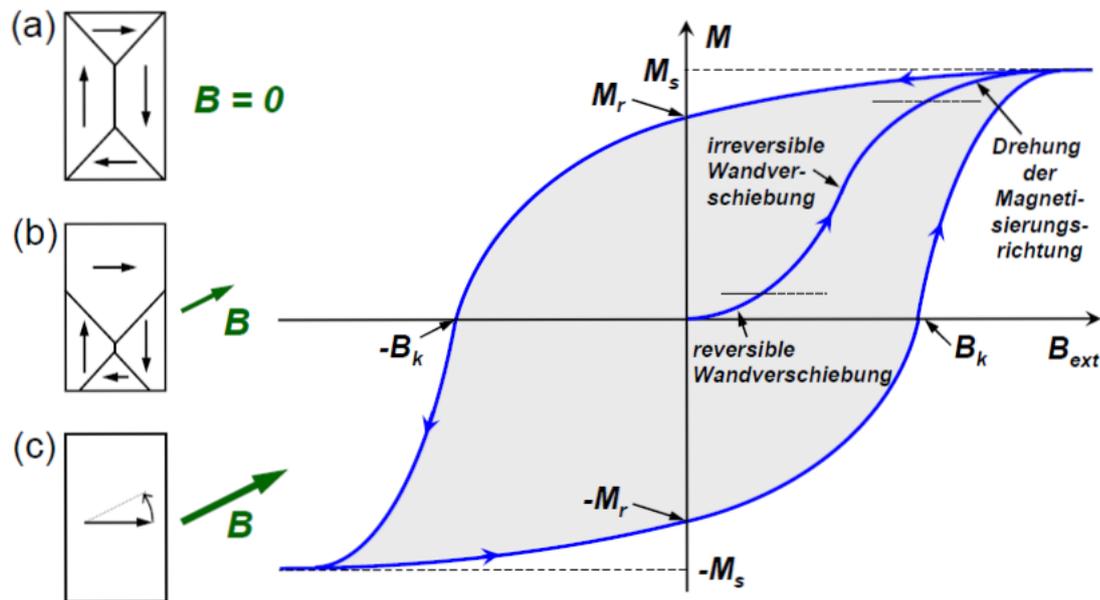


Abbildung 1.3: Hystereseschleife (rechts) mit zugehörigem Magnetisierungszustand (links (a)-(c)). Hierbei zeigt (a) den entmagnetisierten Zustand bei $B_{ext} = 0$, in dem sich die Magnetisierungsrichtungen aller Domänen aufheben $\vec{M} = 0$. Beim Anlegen eines äußeren Feldes $B_{ext} \neq 0$ (siehe (b)), verschieben sich die Domänenwände, sodass die Gesamtmagnetisierung anwächst. Bei hinreichend starken Feldern liegt der Festkörper in einem eindomänen Zustand vor und die magnetischen Momente werden von der magnetisch leichten Achse in die Richtung des äußeren Feldes gedreht (c). Entnommen aus [5].

Befindet sich der Ferromagnet schließlich in einem eindomänen Zustand, dreht sich lediglich die Magnetisierungsrichtung, bis alle magnetischen Momente in Richtung des äußeren Feldes zeigen und die Sättigungsmagnetisierung M_S erreicht ist. Aufgrund der Irreversibilität der Magnetisierungszustände bezeichnet man diesen Verlauf als "Neukurve".

Wird das angelegte Feld bei einem gesättigten Ferromagneten auf null reduziert, so behält der Ferromagnet eine Restmagnetisierung, die Remanenz \vec{M}_R genannt wird. Das Koerzitivfeld $-\vec{B}_K$ ist das äußere Feld, bei dem die Magnetisierung auf null sinkt. Dieser Zustand ist bezüglich seiner Domänenstruktur durch den vorangegangenen Magnetisierungsverlauf genau charakterisiert, im Gegensatz zu dem entmagnetisierten Zustand, der sich z. B. durch Erhitzen des Ferromagneten wiederherstellen lässt.

Ferromagnetische Materialien werden in der Regel anhand der eingeschlossenen Fläche einer Hystereseschleife charakterisiert, welche die dissipierte Energie in

Form von Wärme darstellt:

$$W = \oint \mu_0 \vec{M} d\vec{B}_{ext} \quad (1.6)$$

Materialien mit großer Energiedissipation werden hartmagnetisch, Materialien mit kleiner Energiedissipation weichmagnetisch genannt.

1.1.4 Stoner-Wohlfarth-Modell

Das Stoner-Wohlfarth-Modell wurde 1948 von Edmund Clifton Stoner und Erich Peter Wohlfarth veröffentlicht: Es beschreibt die Magnetisierung von eindomänigen, also hinreichend kleinen, ferromagnetischen Festkörpern und dient als simples Modell für magnetische Hystereseschleifen.

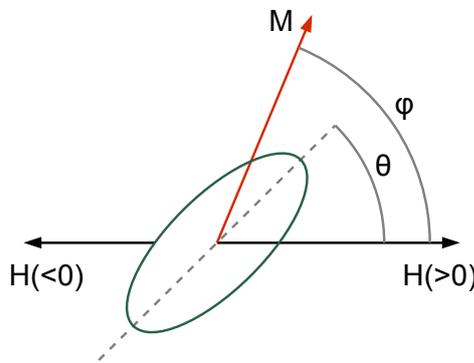


Abbildung 1.4: Skizze zum Stoner-Wohlfarth-Modell. Die magnetische Anisotropie wird durch die Ellipse dargestellt, deren lange Hauptachse die magnetisch leichte Achse angibt. \vec{M} gibt die Richtung der Magnetisierung an, während ϕ bzw. θ jeweils den Winkel zwischen Magnetisierung bzw. magnetisch leichter Achse und dem äußeren Feld \vec{H} angeben. Entnommen aus [8].

In einem eindomänigen Ferromagneten sind alle magnetischen Momente parallel ausgerichtet, deren Orientierung durch den Vektor \vec{M} dargestellt wird. Dieser Vektor dreht sich, wenn das äußere Feld \vec{B} entlang einer Achse verändert wird; der Betrag der Magnetisierung bleibt jedoch konstant bei der Sättigungsmagnetisierung $\|\vec{M}\| = M_S$. Es bezeichnet ϕ den Winkel zwischen dem äußeren Magnetfeld und der Magnetisierung, der Winkel zwischen der magnetisch leichten Achse und dem äußeren Magnetfeld ist θ . Desweiteren wird angenommen, dass es sich um eine uniaxiale Anisotropie handelt, das heißt es existiert eine leichte und zwei (gleich) schwere Achsen [3].

Die Energiedichte des Ferromagneten in einem Magnetfeld ergibt sich damit zu (vgl. Gleichung 1.5):

$$\mathcal{E} = K \sin^2(\phi - \theta) - \mu_0 M_S H \cos \phi \quad (1.7)$$

Der erste Summand beschreibt die Anisotropieenergie mit K als Anisotropiekonstante; der zweite Term berücksichtigt die Wechselwirkung mit dem äußeren Magnetfeld.

Im Gleichgewichtszustand muss die Energie minimiert werden, was zu den Bedingungsgleichungen

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\phi} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d^2\mathcal{E}}{d\phi^2} > 0 \quad (1.8)$$

führt.

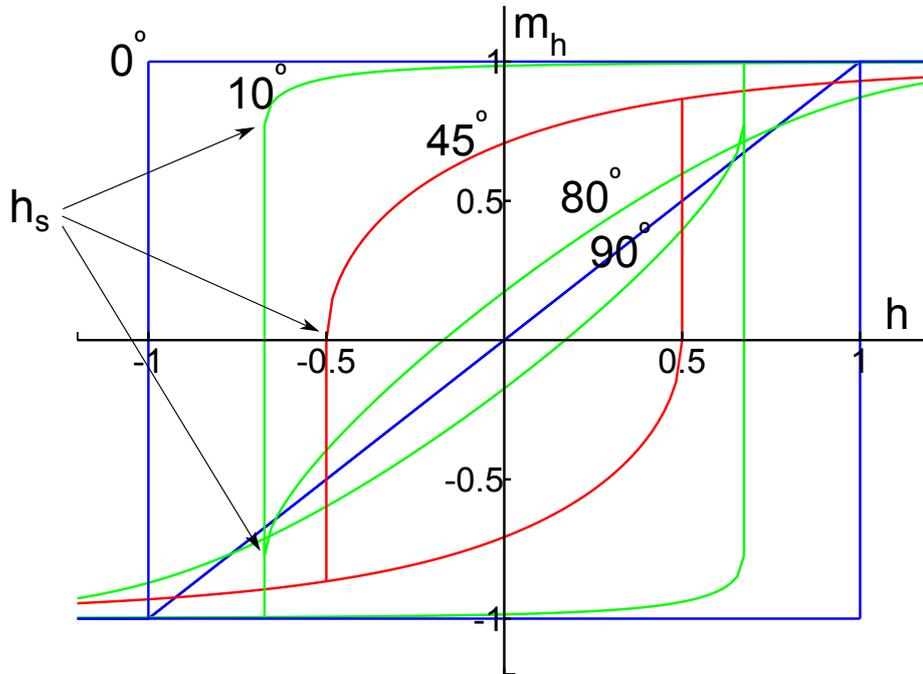


Abbildung 1.5: Hystereseschleifen für verschiedene Winkel θ . h bezeichnet dabei das normierte äußere Feld und m_h den normierten Anteil der Magnetisierung parallel zu h [8].

In Abb. 1.5 ist die normierte Magnetisierung $m_h = M_S \cos \phi$ entlang der Achse des äußeren Magnetfeldes für verschiedene Winkel θ skizziert, die sich durch das Lösen von (1.8) ergibt. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Hystereseschleife für $\theta = 0$ rechteckig ist und sich für $0 < \theta < \pi$ einer Gerade annähert, die sich ergibt, wenn das äußere Feld senkrecht zur leichten Magnetisierungsachse steht.

Ausgezeichnete Punkte sind die sogenannten *Switching Points* h_s : Bei diesen Magnetfeldern wird die zweite Ableitung der Freien Energie null, sodass die Energie sich an einem Sattelpunkt befindet und in den nächsten Gleichgewichtszustand „rutscht“ [4].

1.2 Mikro-Hall-Magnetometrie

Ziel der Mikro-Hall-Magnetometrie ist es, anhand der Hall-Spannung, den Magnetisierungszustand der Probe möglichst genau zu bestimmen.

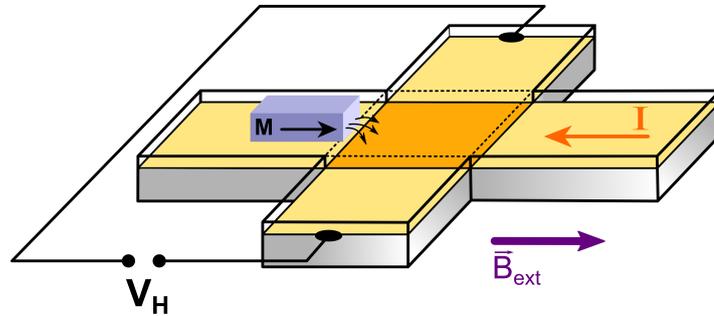


Abbildung 1.6: Schematische Darstellung der Messmethode. Die Probe (blau) wird auf der Sensoroberfläche positioniert. Die Hall-Spannung V_H wird senkrecht zur Stromrichtung I , die an das 2DEG (gelb) angelegt wurde, abgegriffen. Entnommen aus [9].

Dazu wird die Probe auf einem Hall-Sensor platziert, sodass das Streufeld der Probe das darunterliegende zweidimensionale Elektronengas (2DEG) durchdringt. Beim Anlegen eines Stromes an das Hall-Kreuz erfahren die Elektronen durch das Magnetfeld eine Lorentz-Kraft senkrecht zur Stromrichtung. Die daraus resultierende Hall-Spannung ist das Messsignal, das von dem Streufeld und der damit verbundenen Magnetisierung der Probe erzeugt wird. In Abb. 1.6 ist dieser Aufbau schematisch skizziert.

Im Folgenden wird genauer auf den Hall-Effekt sowie die Entstehung eines zweidimensionalen Elektronengases und dessen Transporteigenschaften eingegangen.

1.2.1 Hall-Effekt

Der klassische Hall-Effekt beschreibt das Auftreten einer (Hall-)Spannung in einem stromdurchflossenen Leiter beim Anlegen eines Magnetfeldes. Die Hall-Spannung tritt dabei senkrecht zum angelegten B-Feld und zur Richtung des Stromflusses auf. Dieser Effekt wurde erstmals 1879 von Edwin Hall entdeckt.

Zurückzuführen ist dieser Effekt auf die Ablenkung eines Elektrons mit Geschwindigkeit \vec{v} in einem statischen Magnetfeld. Die Kraft, die auf das geladene Teilchen q wirkt, ist die Lorentz-Kraft:

$$\vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (1.9)$$

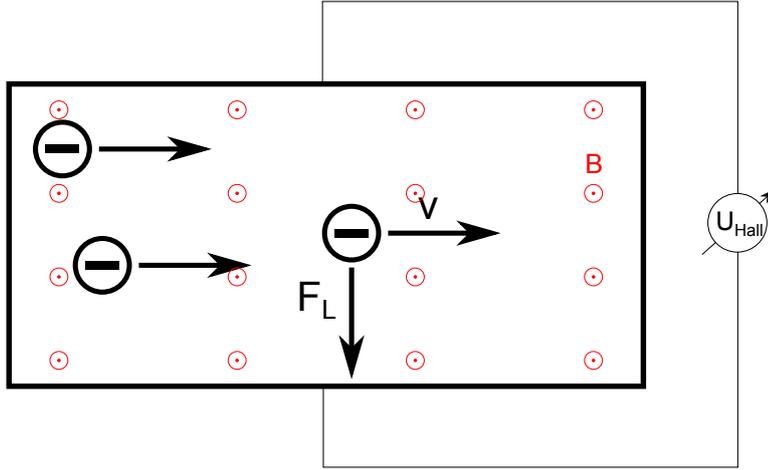


Abbildung 1.7: Beim klassischen Hall-Effekt werden Elektronen beim Anlegen eines äußeren Magnetfeldes (rot) senkrecht zur Stromrichtung abgelenkt.

In einem Hall-Kreuz können sich die Elektronen nur in zwei Dimensionen bewegen; wenn selbiges nun von einem Streufeld $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ durchdrungen wird, ergibt sich für die Hall-Spannung:

$$U_{Hall} = \frac{1}{n_{2D}e} I \langle B_z \rangle \quad (1.10)$$

Dabei ist I der Strom senkrecht zur Hall-Spannung und n_{2D} die Ladungsträgerdichte des zweidimensionalen Elektronengases. Desweiteren ist das mittlere Magnetfeld definiert als:

$$\langle B_z \rangle(z) = \int_{Hall-Kreuz} \vec{B}(x, y, z) d\vec{A} \quad (1.11)$$

Da der Strom in der Regel konstant gehalten wird, ist es sinnvoll, mit Hilfe des Ohm'schen Gesetzes einen Hall-Widerstand zu definieren, der nur von dem Streufeld der Probe abhängt.

$$R_{Hall} = \frac{U_{Hall}}{I} = \frac{1}{n_{2D}e} \langle B_z \rangle \quad (1.12)$$

Ziel der Berechnungen in dieser Arbeit ist es, $\langle B_z \rangle$ bei gegebener Magnetisierung zu bestimmen und eine realistische Vorhersage für eine Messung zu treffen.

1.2.2 Zweidimensionales Elektronengas (2DEG)

Offensichtlich verhält sich die Hall-Spannung nach Gleichung (1.10) antiproportional zu der Elektronendichte im Leiter. Um ein möglichst großes Signal zu erhalten, empfiehlt es sich, die Messungen bei kleinen Elektronendichten und bei hohen Beweglichkeiten durchzuführen. Im Gegensatz zu Metallen, die zwar hohe Ladungsträgerdichten, aber auch hohe Mobilitäten aufweisen, zeigen zweidimensionale Elektronengase das erforderliche Verhalten.

Ursache für das Ausbilden eines zweidimensionalen Elektronengases, ist die Existenz von Grenzflächenzuständen. Für einen unendlich ausgedehnten Kristall

bilden die Bloch-Funktionen die Lösungen der Schrödingergleichung. Betrachtet man aber einen endlich ausgedehnten Kristall, so findet das Bloch-Theorem, aufgrund der gebrochenen Symmetrie keine Anwendung mehr und die Wellenfunktion muss an den Rändern die typischen Stetigkeitsbedingungen erfüllen. Die Elektronenverteilung für einen endlich ausgedehnten n-dotierten Halbleiter, die sich aus der Lösung der Schrödingergleichung ergibt, ist in Abb. 1.8 dargestellt.

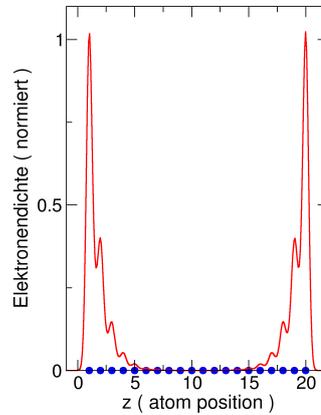


Abbildung 1.8: Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Elektronen für einen n-dotierten eindimensionalen Halbleiter bestehend aus zwanzig Atomen. Entnommen aus [10].

Wie zu erkennen ist, liegt an den Rändern des Kristalls eine deutlich erhöhte Elektronenkonzentration vor. Offensichtlich existieren an diesen Stellen neben dem Leitungs- und Valenzband noch weitere Zustände in der Bandlücke, die sogenannten Oberflächenzustände, die im thermodynamischen Gleichgewicht teilweise mit Elektronen aus dem Leitungsband gefüllt sind. Diese erhöhte Ladungskonzentration bewirkt eine Bandverbiegung nach oben (siehe Abb. 1.9). Die Überlegungen für einen p-dotierten Halbleiter laufen bezüglich der Lochdichte analog; es stellt sich eine Bandverbiegung nach unten ein.

Bringt man einen n-dotierten und einen p-dotierten Halbleiter in Kontakt, so bildet sich an der Grenzfläche näherungsweise ein Dreieckspotential (siehe Abb. 1.10). Um den Gleichgewichtszustand zu erreichen, müssen sich die unterschiedlichen Fermi-Energien der beiden Halbleiterschichten angleichen. Dies geschieht, indem Elektronen von der n-dotierten Schicht in die p-dotierte Schicht fließen.

Das Lösen der Schrödingergleichung für dieses Potential führt auf die Airy-Funktionen als Eigenfunktionen des Systems [11]:

$$\phi(z) = A \cdot Ai(z) = A \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{u^3}{3} + uz\right) du \quad (1.13)$$

mit den zugehörigen Energieeigenwerten:

$$E_n = c_n \left(\frac{(eF\hbar)^2}{2m^*} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (1.14)$$

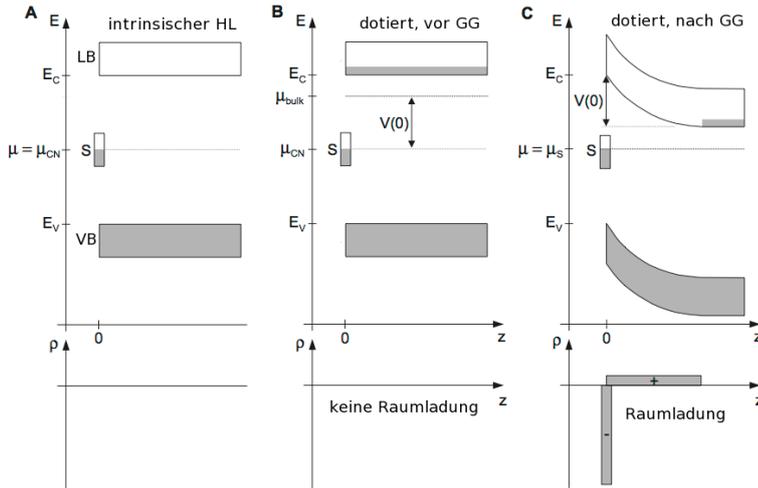


Abbildung 1.9: Besetzung des Leitungs- (LB) und Valenzbandes (VB) sowie der Oberflächenzustände (S) für einen intrinsischen (A) und einen n-dotierten (B)-(C) Halbleiter; der schraffierte Bereich deutet die Besetzung des Zustandes an. Durch das Auffüllen der Oberflächenzustände, stellt sich eine Bandverbiegung nach oben ein. Entnommen aus [10].

Dabei sind c_n die Nullstellen der Airy-Funktion und F die Steigung des Dreieckspotentials. Bei tiefen Temperaturen kann, aufgrund der geringen Ladungsträgerdichte und der damit verbundenen niedrigen Fermi-Energie, angenommen werden, dass sich alle Elektronen im Grundzustand befinden. In x - und y -Richtung können sich die Elektronen frei bewegen; die Energieeigenwerte sind also durch das unterste Subband gegeben.

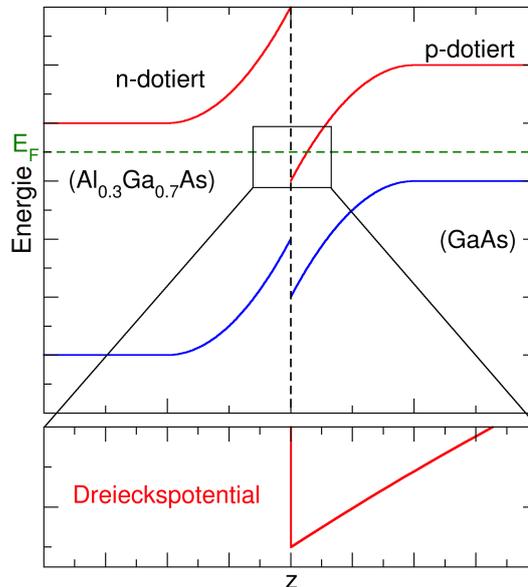


Abbildung 1.10: Darstellung der Bandstruktur für eine GaAs-AlGaAs-Grenzschicht (oben) mit dem Dreieckspotential für das 2DEG (unten). Entnommen aus [10].

1.2.3 Transporteigenschaften

Das Drude-Modell greift die klassische Vorstellung auf, dass die Bewegung der Elektronen lediglich durch Stöße mit Störstellen beeinträchtigt wird. Die Strecke, die ein Elektron im Mittel zwischen zwei Stößen zurücklegen kann, wird als mittlere freie Weglänge bezeichnet:

$$l = v_F \tau = \frac{\hbar \mu}{e} \sqrt{2\pi n} \quad (1.15)$$

Dabei ist v_F die Fermienergie und τ die mittlere Zeit zwischen zwei Stößen. Es zeigt sich, dass die mittlere freie Weglänge auch über die Elektronendichte n und -beweglichkeit μ bestimmt werden kann [6].

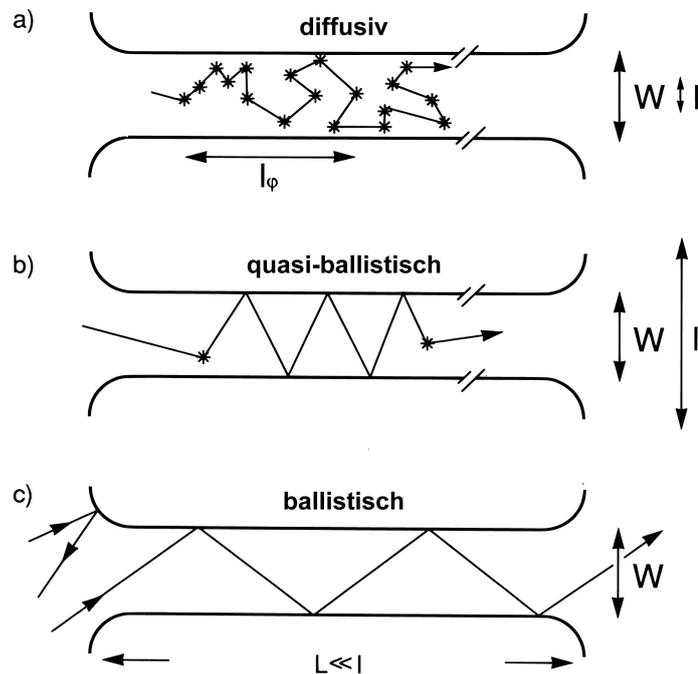


Abbildung 1.11: Darstellung der verschiedenen Transportregimes.

Transportregimes

Mit Hilfe der Definition der mittleren freien Weglänge lassen sich, je nach Größe des Hallkreuzes W , drei Bereiche unterscheiden (siehe Abb. 1.11):

- Diffusiver Transport ($l \ll W$): Bei diffusivem Transport finden innerhalb einer Strukturlänge zahlreiche Streuprozesse statt, so dass die Streuung an den Grenzflächen vergleichsweise selten auftritt und somit vernachlässigbar ist.
- Quasi-ballistischer Transport ($l \gtrsim W$): Für kleinere Abmessungen der aktiven Fläche sind sowohl Stöße an den Grenzflächen, wie auch Streuung an Phononen und Störstellen relevant.

- Ballistischer Transport ($l \gg W$): Ist die mittlere freie Weglänge sehr viel größer als die Kantenlänge des Hallkreuzes, so kann angenommen werden, dass sich das Elektron durch die aktive Fläche bewegt, ohne dass es seinen Impuls durch Stöße mit Störstellen verliert. Lediglich die Streuung an den Grenzen der Struktur ist relevant.

Antwortfunktion

Je nachdem in welchem Transportregime die Messung durchgeführt wird, müssen unterschiedliche Korrekturen der Hall-Spannung vorgenommen werden, um ein realistisches Simulationsergebnis zu erhalten. Gleichung (1.11) impliziert, dass die Streufeldlinien der Probe unabhängig davon, wo sie das 2DEG durchdringen, gleichermaßen zum Hall-Effekt beitragen. Diese Annahme ist insbesondere im Falle diffusiven Transports nicht gerechtfertigt: Das Magnetfeld in Gleichung (1.11) muss mit einer ortsabhängigen Gewichtung $F_H(x, y)$ multipliziert werden, die Antwortfunktion genannt wird:

$$\langle B_z \rangle(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_H(x, y) B_z(x, y, z) dx dy \quad (1.16)$$

Die Antwortfunktionen für die unterschiedlichen Transportregimes wurden bereits untersucht (siehe [12]). Dazu wird ein magnetischer (Anti-)Punkt (engl. *antidot*) auf dem Sensor positioniert, der im idealisierten Fall ein delta-förmiges Magnetfeld im Hallkreuz erzeugt und so einen Vergleich der Hall-Spannung für verschiedene Positionen des Punktes liefert.

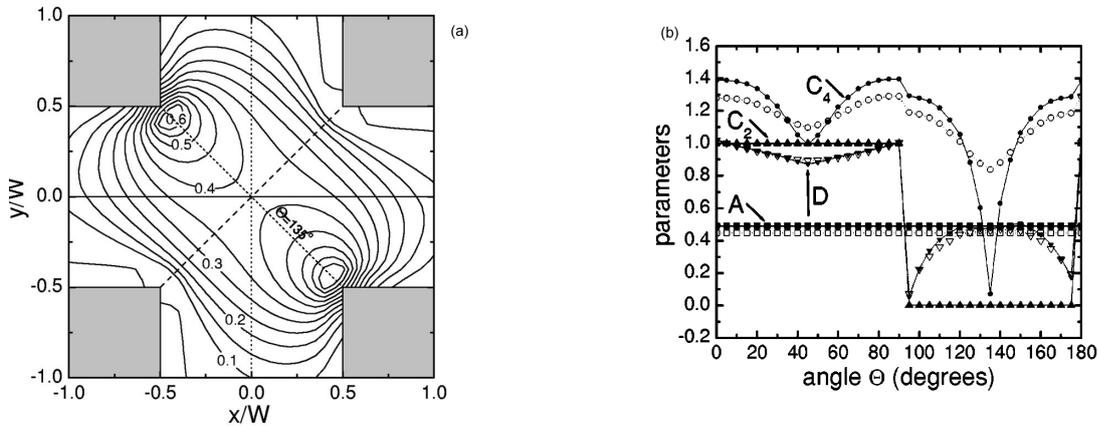


Abbildung 1.12: Antwortfunktion für einen Hall-Sensor im diffusen Regime (a). Koeffizienten aus Gleichung 1.17 (leere Symbole) und 1.18 (gefüllte Symbole) in Abhängigkeit des Winkels (b). Aus [12].

- Diffusiver Transport: In Abb. 1.12 ist die Antwortfunktion für einen quadratischen Sensor im diffusiven Regime dargestellt. Diese lässt sich in Polarkoordinaten näherungsweise durch die Formel

$$F_H(r, \theta) = A \frac{1}{1 + (rC(\theta))^4} \quad (1.17)$$

beschreiben. In der Regel haben Hall-Sensoren keine perfekte quadratische Form, sondern sind an den Ecken der aktiven Fläche abgerundet. In Gleichung 1.17 zeichnet sich dies durch zusätzliche Terme ab:

$$F_H(r, \theta) = A \frac{1 + (rD(\theta))^2}{1 + (rC_2(\theta))^2 + (rC_4(\theta))^4} \quad (1.18)$$

Der Koeffizient A ist konstant, während C_2, C_4 und D von θ abhängen. Dieses Verhalten ist in Abb. 1.12 (links) dargestellt.

- Nicht-diffusiver Transport: In [13] und [14] wurden die Antwortfunktionen für verschiedene Proben untersucht. In den Ergebnissen dieser Arbeiten zeigt sich, dass sich für den ballistischen und quasi-ballistischen Transport keine universell anwendbare Antwortfunktion formulieren lässt. Diese hängt auf nichttriviale Weise von der Probengeometrie, der Form des Hall-Kreuzes und der Stärke des Magnetfeldes der Probe ab.

Position der Probe

Die Transporteigenschaften bewirken nicht nur eine Verringerung der Hall-Spannung, sondern können auch entscheidend für die optimale Position der Probe auf dem Sensor sein. Die Antwortfunktion, die Gleichung 1.11 impliziert, lautet:

$$F_H(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für } (x, y) \in A \\ 0 & \text{für } (x, y) \notin A \end{cases} \quad (1.19)$$

Es ist wenig sinnvoll, bei einer Magnetisierung parallel zur Ebene des 2DEGs, die Probe mittig auf dem Sensor zu positionieren, da sich die Streufeldanteile gegenseitig aufheben (siehe hierzu auch Abb. 2.4). Es empfiehlt sich für eine Antwortfunktion wie in Gleichung (1.19), die Probe so zu positionieren, dass diese sich zur Hälfte über der aktiven Fläche befindet, um das Signal zu maximieren.

Unter Berücksichtigung des Transportregimes können durchaus mehrere Positionen interessant sein, die jeweils unterschiedliche Vorteile bieten:

- Eine Maximierung der Hall-Spannung kann erreicht werden, wenn die Probe so positioniert wird, dass möglichst viele Streufeldlinien die aktive Fläche an einem Maximum der Antwortfunktion durchdringen.
- Eine räumliche Auflösung des Streufeldes wird durch eine Position bei möglichst hohen Gradienten der Antwortfunktion erlangt.

Im Folgenden werden, sofern nicht anders beschrieben, Proben betrachtet, die sich zur Hälfte über der aktiven Fläche befinden.

Kapitel 4

Zusammenfassung und Ausblick

Mit *MicMag* wurde in dieser Arbeit ein Programm zur Streufeldberechnung bereitgestellt, das es dem Nutzer ermöglicht, mit Hilfe der analytischen Lösungen der magnetischen Streufelder einfache Strukturen zusammenzustellen und diese hinsichtlich ihrer Position für Messungen zu optimieren. Desweiteren wurde mit der Software zur Auswertung von *OOMMF*-Daten ein Werkzeug geschaffen, mit dem sich bereits qualitative Vorhersagen hinsichtlich der Hall-Spannung treffen lassen. Mit Hilfe des Programmes lässt sich die Hall-Spannung bei bekannter Magnetisierungskonfiguration berechnen und die modellhafte Beschreibung direkt mit dem Experiment vergleichen. Zum einen werden dazu analytische Lösungen des Streufeldes herangezogen, die beliebig kombiniert werden können; zum anderen können Daten von *OOMMF* (also beliebigen mikromagnetischen Simulationen) genutzt werden, um die Hall-Spannung zu berechnen.

Bei der Untersuchung ferromagnetischer Materialien mittels Mikro-Hall-Magnetometrie wird meist angenommen, dass die Hall-Spannung proportional zur Magnetisierung der Probe ist. Mit Hilfe des im Rahmen dieser Arbeit entstandenen Programmes *MicMag* konnte gezeigt werden, dass diese Annahme im Allgemeinen nicht immer korrekt ist. Insbesondere bei komplexen Domänenstrukturen, kann die Hall-Spannung ein deutlich unterschiedliches Verhalten zeigen, das maßgeblich durch die relative Position der Probe festgelegt wird. Umgekehrt konnte gezeigt werden, dass eine geschickte Probenpositionierung und Wahl der aktiven Fläche zu einer deutlich verbesserten Auflösung in den Messergebnissen führen kann.

Da eine Simulation der gesamten, experimentell untersuchten Spin-Ice-Struktur, aufgrund der begrenzten Rechenkapazitäten, nicht möglich ist, wurden erste Untersuchungen zu den Sprüngen in der Hysterese an dem Einzelelement angestellt, die mit Hilfe von *MicMag* verifiziert werden konnten.

Für den ebenfalls experimentell untersuchten Quader des ferromagnetischen Semimetalls EuB_6 konnten die Messergebnisse mit der analytischen Lösung des Streufeldes eines Quaders bei Sättigungsmagnetisierung qualitativ bestätigt werden.

Der nächste Schritt zur Verbesserung der Simulationsergebnisse ist die Implementierung einer Antwortfunktion des 2DEGs in einem realen Hall-Sensor (siehe Abschnitt 1.2.3), die die Streufelddaten noch näher an realistische Messergebnis-

se heranführt. In *MicMag* wurde diese Funktion schon berücksichtigt, allerdings müssen noch die notwendigen Parameter in Gleichung 1.18 ermittelt werden, um die Antwortfunktion in das Programm einzufügen.