Elementare Zahlentheorie

Blatt 11 — 25.06.2015

Aufgabe 40. (Gitter im quadratischen Zahlkörper, 4 Punkte)

Sei $d \in \mathbb{Z}$ ein Nichtquadrat und $K := \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ein quadratischer Zahlkörper. Für $y \in K \setminus \mathbb{Q}$ definieren wir das Gitter

$$M_y := \mathbb{Z} + \mathbb{Z}y = \{a + by \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq K,$$

und die Menge

$$R_y = \{x \in K \mid xM_y \subseteq M_y\}.$$

Zeigen Sie, dass R_y ein Unterring in $\mathfrak{o}_K$ (dem Ganzzahlring von K) ist.

Aufgabe 41. (Kettenbruchentwicklung rationaler Zahlen, 2 Punkte)

Bestimmen Sie die Kettenbruchentwicklung von $\frac{90901}{68845}$. Vergleichen Sie diese mit dem euklidischen Algorithmus zur Berechnung des ggTs von 90901 und 68845.

Aufgabe 42. (Endliche Kettenbrüche, 2+2 Punkte)

Sei $(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge ganzer Zahlen mit $a_i \geq 1$ für $i > 0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir wie in der Vorlesung

$$M_n = \begin{pmatrix} p_n & r_n \\ q_n & s_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

so dass $\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$ gilt. Zeigen Sie folgende Behauptungen für alle $n \in \mathbb{N}$:

(a) $[a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0] = \frac{p_n}{p_{n-1}}$.

(b) $[a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1] = \frac{q_n}{q_{n-1}}$.

—— bitte wenden ——

Aufgabe 43. (Der Wert eines unendlichen Kettenbruchs, 2 Punkte)

Bestimmen Sie den Wert des unendlichen Kettenbruchs $[2, 1, 4, 2, 1, 4, \ldots]$.

Aufgabe 44. (Kettenbruchentwicklung von Quadratwurzeln, 3+1 Punkte)

Es sei $m \geq 2$ ein natürliche Zahl.

(a) Bestimmen Sie die Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{m^2 - 1}$. Achten Sie dabei auf die Periodizität des Kettenbruchs.

(b) Berechnen Sie für $m = 2$ die ersten vier Näherungsbrüche von $\sqrt{3}$.

Abgabe: Am kommenden Donnerstag, den 02.07.2015, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/54089776/Elementare_Zahlentheorie`