Elementare Zahlentheorie

Blatt 4 — 07.05.2015

Aufgabe 13. (Summe zweier Quadrate, 1,5+1+1,5 Punkte)

Zeigen Sie:

(a) Ist eine natürliche Zahl n als Summe zweier Quadrate *rationaler* Zahlen darstellbar (Beispiel: $13 = (\frac{17}{5})^2 + (\frac{6}{5})^2$), so lässt sie sich auch als Summe zweier Quadrate *ganzer* Zahlen darstellen.

(b) Sind $l, m \in \mathbb{N}$, so gilt:

$$\exists\, x, y \in \mathbb{Q} : \frac{l}{m} = x^2 + y^2 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, u, v \in \mathbb{Z} : lm = u^2 + v^2.$$

(c) Sind $l, m \in \mathbb{N}$ teilerfremd, so lässt sich l/m genau dann als Summe zweier Quadrate rationaler Zahlen darstellen, wenn l und m Summen zweier Quadrate ganzer Zahlen sind.

Aufgabe 14. (Fermat-Gleichungen, 4 Punkte)

Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl und $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ eine Lösung der Fermat-Gleichung

$$x^n + y^n = z^n.$$

Zeigen Sie: Ist $q := 2n + 1$ eine Primzahl, so ist $q \mid xyz$.

Aufgabe 15. (Pythagoräisches Tripel, 4 Punkte)

Sei (a, b, c) ein *Pythagoräisches Tripel*, d.h. ein Tripel natürlicher Zahlen, welches die Gleichung

$$a^2 + b^2 = c^2$$

erfüllt. Zeigen Sie, dass gilt: $12 \mid ab$ und $60 \mid abc$.

— bitte wenden —

Aufgabe 16. (Fermat für Polynome, 4 Punkte)

Sei $n \geq 3$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie: Die Gleichung

$$f^n + g^n = h^n$$

hat keine Lösung in Polynomen $f, g, h \in \mathbb{C}[X]$ mit $fgh \neq 0$ und nicht alle konstant.

Abgabe: Am kommenden **Mittwoch, den 13.05.2015, bis 14 Uhr** in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/54089776/Elementare_Zahlentheorie`