Elementare Zahlentheorie

Blatt 2 — 23.04.2015

Aufgabe 5. (Spezialfall des Dirichlet'schen Primzahlsatzes, 1+3 Punkte)

Zeigen Sie:

(a) Jede Primzahl größer als 3 ist von der Form $6k+1$ oder $6k-1$ mit $k \in \mathbb{N}$.

(b) Es gibt unendlich viele Primzahlen der Form $6k-1$ mit $k \in \mathbb{N}$.

Bemerkung – Der Dirichlet'sche Primzahlsatz besagt im Allgemeinen, dass es in der arithmetischen Progression $a, a+n, a+2n, \dots$, wobei $a, n \in \mathbb{N}$ teilerfrend sind, unendlich viele Primzahlen gibt. Ein bisher bekannter Beweis dieses Satzes benötigt Hilfsmittel aus der analytischen Zahlentheorie. Diese werden aber für den Spezialfall hier nicht benötigt.

Aufgabe 6. (Primzahl und Polynom, 1+2+1 Punkte)

Es sei $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ ein nichtkonstantes Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten. Zeigen Sie:

(a) Für $m, n \in \mathbb{Z}$ ist $f(m)$ ein Teiler von $f(m + n \cdot f(m))$.

(b) Es gibt ein $n \in \mathbb{Z}$, so dass $f(n)$ weder prim noch eine Einheit ist.
Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass jedes nichtkonstante Polynom über $\mathbb{Z}$ jeden Wert höchstens endlich oft annimmt.

(c) Sei nun $f(X) := X^2 - X + 41$. Nutzen Sie einen Computer, um das kleinste $n \in \mathbb{N}$ derart, dass $f(n)$ nicht prim ist, zu bestimmen.

Aufgabe 7. (Kongruenzen, 2+2 Punkte)

Es sei $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie: $2^{4n+1} + 3^{3n+2} \equiv 0 \mod 11$.

(b) Zeigen Sie: $7^n \equiv 18n^2 - 12n + 1 \mod 27$.

—— **bitte wenden** ——

Aufgabe 8. (Zahlentheorie im Kartenspiel, 2+2 Punkte)

Ein Satz Spielkarten besteht aus 52 Karten. Um sie zu mischen, wird der Kartenstapel zunächst halbiert. Die obere Hälfte geht in die linke Hand und die untere in die rechte. Danach werden die Karten, von der linken Seite beginnend, abwechselnd von den beiden Händen losgelassen (d.h. zuerst die unterste Karte von der linken Hand, dann die von der rechten Hand, dann die zweitunterste von der linken Hand usw.), so dass sie gleichmäßig ineinander verzahnen. Nummeriert man also die Karten mit $1, 2, 3, \ldots, 52$, so lautet die Reihenfolge der Karten nach der Mischung

$$27, 1, 28, 2, \ldots, 51, 25, 52, 26.$$

Mit anderen Worten: Ist $f(n)$ die Position der n-ten Karte nach der Mischung, so ist

$$f(n) = \begin{cases} 2n, & \text{falls } n \leq 26, \\ 2(n-26)-1, & \text{falls } n > 26. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie: nach geeigneter Anzahl $N > 0$ von Wiederholungen dieses Prozesses sind die Karten wieder genau in der ursprünglichen Reihenfolge.

(b) Bestimmen Sie, ob es möglich ist, durch geeignete Anzahl von Wiederholungen dieses Prozesses den Kartenstapel in der genau umgekehrten Reihenfolge zu bekommen.

Hinweis: Rechnen Sie modulo 53.

Abgabe: Am kommenden Donnerstag, den 30.04.2015, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathemtik, Robert–Mayer Strasse 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/54089776/Elementare_Zahlentheorie`
