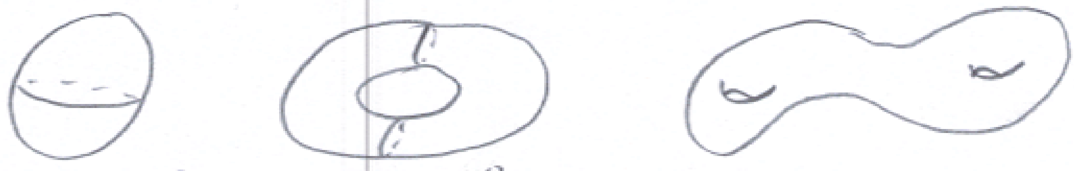
Der differenzierbare Sphärensatz

Alumnitreffen, 19.11.2011

1) Geometrie und Topologie

Sei M eine „Fläche", d.h. ein zweidimensionales Objekt:



Sphäre S^2 Torus T^2

Die lokale Geometrie von M wird durch die Gausskrümmung bestimmt.

S_r = Kreis mit Radius r um einen Punkt $p \in M$.

Dann gilt $L(S_r) = 2\pi r\left(1 - \frac{K}{6} r^2 + o(r^2)\right)$

wobei $K = K(p)$ die Gausskrümmung im Punkt p ist.

Bsp: Für die Sphäre S^2 ist $K \equiv 1$, für $\mathbb{R}^2$ ist $K \equiv 0$.

Für Torus ist $K > 0$ „aussen" und $K < 0$ „innen".

Die globale Geometrie (besser gesagt Topologie) wird durch die Eulercharakteristik bestimmt: Trianguliere die Fläche und zähle $\chi :=$ # Ecken − # Kanten + # Flächen

z.B. $\chi(S^2) = 8 - 6 + 12 = 2$

$\chi(\text{Torus}) = 0$

Gauss–Bonnet: $\int_M K = 2\pi\chi(M)$

z.B. $K \equiv 1$, $vol(S^2) = 4\pi$, $\chi(S^2) = 2$.

Egal, welche Metrik der Torus T^2 trägt, das Integral über K ist 0. z.B. kann es auf T^2 keine Metrik mit $K > 0$ geben.

Auf der Sphäre S^2 ist jede geschlossene Kurve „kontrahierbar", d.h. lässt sich auf einen Punkt „zusammenziehen". S^2 ist einfach zusammenhängend.

S^2 ist die einzige einfach zusammenhängende Fläche.

2) Höherdimensionale Verallgemeinerungen

M = n-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Die Asymptotik der Volumina kleiner Sphären führt auf die Skalarkrümmung s. Diese trägt wenig Information über die Topologie von M.

Betrachtet man Kreise tangential an eine Ebene, so kriegt man die Schnittkrümmung K.

Diese hängt von $p \in M$ und von Ebene $P \subset T_pM$ ab.

Bsp.: - $K \equiv 1$ für n-Sphäre S^n.
- $K \equiv 0$ für $\mathbb{R}^n$
- $K \equiv -1$ für H^n (hyperbolischer Raum)

Topologie: - χ existiert, ist aber schwache Invariante.
Es gibt viele Mannigfaltigkeiten mit gleicher Euler charakteristik.

- M heisst einfach zusammenhängend, wenn jede geschlossene Kurve kontrahierbar ist.

Poincaré vermutung 1904: S^3 ist die einzige einfach zusammenhängende 3-dim. Mannigfaltigkeit.

Es existiert auch eine höherdimensionale Version.
Diese wurde von Smale ($n > 4$) 1960 bewiesen (Fieldsmedaille 1966), von Freedman ($n = 4$) 1982 (Fields 1986).
Perelman löste die ursprüngliche Vermutung 2002 (Fields 2006). Hilfsmittel: Ricciflus (Hamilton)

3) Geometrische Charakterisierung der n-Sphäre:

Sei M einfach zusammenhängend, $K \approx 1$. Ist dann $M = S^n$? Genauer: Sei $h \le K \le 1$ (oder $h < K \le 1$) für ein festes h. Folgt dann

a) M ist homöomorph zu S^n

oder sogar

b) M ist diffeomorph zu S^n?

Bem.: Der Unterschied zwischen a) und b) ist subtil. Es gibt Mannigfaltigkeiten, die homöomorph, aber nicht diffeomorph sind. Z.B. hat Milnor (Fields 1962) gezeigt, dass es auf S^7 genau 28 verschiedene „differenzierbare Strukturen" gibt.

Bem.: Ist $h < \frac{1}{4}$, so gibt es Gegenbeispiele: Komplex-projektiver, quaternionisch projektiver Raum haben $\frac{1}{4} \le K \le 1$, sind aber nicht homöomorph zu S^n.

Rauch $h \approx \frac{3}{4}$ für a) 1951

Klingenberg $h = 0.55$ (n gerade)

Berger $h = \frac{1}{4}$ (n gerade)

Klingenberg $h = \frac{1}{4}$ (n beliebig)

jeweils für a)

Differentierbare Version:

Gromoll-Calabi $h = h(n) \approx 1$ 1966

Sugimoto, Shiohama, Karcher, Ruh $h = 0.87$ 1971

Chen 1991, $n = 4$, $h = \frac{1}{4}$ (Ricci fluss)

Finale Version: $h = \frac{1}{4}$ reicht immer aus für b)

(Brendle-Schoen 2007, Ricci fluss)

4) Ricci fluss

Nimm Metrik g auf M, die von einer „Zeit" t abhängt. Versuche, die Metrik so zu verändern, dass stark gekrümmte Teile flacher werden.

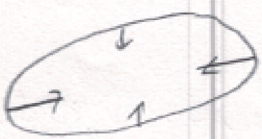
Ric = Riccitensor, misst die Krümmung von M.

Ricci fluss: $\frac{d}{dt} g_t = -2 \, Ric(g_t)$

Eingeführt von Hamilton.

Hoffnung: für $t \to \infty$ konvergiert g_t gegen runde Sphäre.

Ähnliche Gleichung: Fluss entlang mittlerer Krümmung

Anschaulich:  Gummiband schnipst zusammen

Im Grenzwert ein Punkt. Nach Reskalieren wird das Bild immer „runder".

Problem: Riccifluss ist eine PDE, sie muss keine Lösungen besitzen