Finanzderivate: hedgen oder manipulieren ?

Christoph Kühn

Frankfurt MathFinance Institute
Goethe-Universität Frankfurt
http://ismi.math.uni-frankfurt.de/kuehn/

Alumni-Treffen der Frankfurter Mathematik

Goethe-Universität Frankfurt

21. November 2009

H. Kraft und C. Kühn (2009), Large Traders and Illiquid Options: Hedging vs. Manipulation, verfügbar über http://ismi.math.uni-frankfurt.de/kuehn/

Überblick

- Was sind Finanzderivate ?

- Mathematische Modelle / Bewertungsprinzipien

- Manipulation, basiert auf aktuellem Preprint:

  H. Kraft und C. Kühn (2009), Large Traders and Illiquid Options: Hedging vs. Manipulation, verfügbar über
  `http://ismi.math.uni-frankfurt.de/kuehn/`

Was ist ein Finanzderivat ?

- Wertpapier dessen Auszahlung sich aus den Preisen/Werten anderer Größen (Basisgrößen) **ableitet**
- "**Handelbare**" Basisgröße bedeutet: man kann auch direkt in die Basisgröße investieren
- Beispiele für **handelbare** Basisgrößen: Aktien, Aktienindizes, Bonds, Fremdwährungen, andere Derivate
- Beispiele für **nicht handelbare** Basisgrößen: Kreditportfolios ("Collateralized Debt Obligations"), Rohstoffpreise, Energiepreise (nicht lagerbar), Versicherungsschäden, Firmenwerte, Wetterindex, Volatilitäten
- **Hedgen** (= absichern) nur möglich, wenn Basisgröße handelbar (oder zumindest stark korreliert zu einer handelbaren Größe).

Was ist ein Finanzderivat ?

- Wertpapier dessen Auszahlung sich aus den Preisen/Werten anderer Größen (Basisgrößen) **ableitet**
- “**Handelbare**” Basisgröße bedeutet: man kann auch direkt in die Basisgröße investieren
- Beispiele für **handelbare** Basisgrößen: Aktien, Aktienindizes, Bonds, Fremdwährungen, andere Derivate
- Beispiele für **nicht handelbare** Basisgrößen: Kreditportfolios (“**C**ollateralized **D**ebt **O**bligations”), Rohstoffpreise, Energiepreise (nicht lagerbar), Versicherungsschäden, Firmenwerte, Wetterindex, Volatilitäten
- **Hedgen** (= absichern) nur möglich, wenn Basisgröße handelbar (oder zumindest stark korreliert zu einer handelbaren Größe).

Was ist ein Finanzderivat ?

- Wertpapier dessen Auszahlung sich aus den Preisen/Werten anderer Größen (Basisgrößen) **ableitet**
- "**Handelbare**" Basisgröße bedeutet: man kann auch direkt in die Basisgröße investieren
- Beispiele für **handelbare** Basisgrößen: Aktien, Aktienindizes, Bonds, Fremdwährungen, andere Derivate
- Beispiele für **nicht handelbare** Basisgrößen: Kreditportfolios ("Collateralized Debt Obligations"), Rohstoffpreise, Energiepreise (nicht lagerbar), Versicherungsschäden, Firmenwerte, Wetterindex, Volatilitäten
- **Hedgen** (= absichern) nur möglich, wenn Basisgröße handelbar (oder zumindest stark korreliert zu einer handelbaren Größe).

Was ist ein Finanzderivat ?

- Wertpapier dessen Auszahlung sich aus den Preisen/Werten anderer Größen (Basisgrößen) **ableitet**
- “**Handelbare**” Basisgröße bedeutet: man kann auch direkt in die Basisgröße investieren
- Beispiele für **handelbare** Basisgrößen: Aktien, Aktienindizes, Bonds, Fremdwährungen, andere Derivate
- Beispiele für **nicht handelbare** Basisgrößen: Kreditportfolios (“**C**ollateralized **D**ebt **O**bligations”), Rohstoffpreise, Energiepreise (nicht lagerbar), Versicherungsschäden, Firmenwerte, Wetterindex, Volatilitäten
- **Hedgen** (= absichern) nur möglich, wenn Basisgröße handelbar (oder zumindest stark korreliert zu einer handelbaren Größe).

Was ist ein Finanzderivat ?

- Wertpapier dessen Auszahlung sich aus den Preisen/Werten anderer Größen (Basisgrößen) **ableitet**
- "**Handelbare**" Basisgröße bedeutet: man kann auch direkt in die Basisgröße investieren
- Beispiele für **handelbare** Basisgrößen: Aktien, Aktienindizes, Bonds, Fremdwährungen, andere Derivate
- Beispiele für **nicht handelbare** Basisgrößen: Kreditportfolios ("**C**ollateralized **D**ebt **O**bligations"), Rohstoffpreise, Energiepreise (nicht lagerbar), Versicherungsschäden, Firmenwerte, Wetterindex, Volatilitäten
- **Hedgen** (= absichern) nur möglich, wenn Basisgröße handelbar (oder zumindest stark korreliert zu einer handelbaren Größe).

- Beispiele für Derivate: **Put-Option** ("Verkaufsoption"): Der Besitzer erwirbt das Recht (aber nicht die Pflicht), das Basiswertpapier S zum Zeitpunkt T zu einem **vorher vereinbarten Strike-Preis K** zu verkaufen.

$$\text{Zufällige Auszahlung} \;=\; (K - S_T(\omega))^+ = \max\{K - S_T(\omega), 0\}.$$

- **Bonuszertifikat**: $K_1, K_2 \in \mathbb{R}_+$ mit $K_1 < \min\{K_2, S_0\}$

  Zufällige Auszahlung:

$$\max\{S_T(\omega), K_2\} 1_{\{S_t(\omega) \geq K_1 \ \forall t \in [0,T]\}} + S_T(\omega) 1_{\{\exists t \in [0,T] S_t(\omega) < K_1\}}$$

  K_1: Barriere, K_2: Bonusgrenze

  Achtung: Bei Zertifikaten Ausfallrisiko des Emittenten beachten (Lehman-Zertifikate)

- Beispiele für Derivate: **Put-Option** ("Verkaufsoption"): Der Besitzer erwirbt das Recht (aber nicht die Pflicht), das Basiswertpapier S zum Zeitpunkt T zu einem **vorher vereinbarten Strike-Preis K** zu verkaufen.

$$\text{Zufällige Auszahlung} \;=\; (K - S_T(\omega))^+ = \max\{K - S_T(\omega), 0\}.$$

- **Bonuszertifikat**: $K_1, K_2 \in \mathbb{R}_+$ mit $K_1 < \min\{K_2, S_0\}$

  Zufällige Auszahlung:

$$\max\{S_T(\omega), K_2\} 1_{\{S_t(\omega) \geq K_1 \ \forall t \in [0,T]\}} + S_T(\omega) 1_{\{\exists t \in [0,T] S_t(\omega) < K_1\}}$$

  K_1: Barriere, K_2: Bonusgrenze

  Achtung: Bei Zertifikaten Ausfallrisiko des Emittenten beachten (Lehman-Zertifikate)

- Beispiele für Derivate: **Put-Option** ("Verkaufsoption"): Der Besitzer erwirbt das Recht (aber nicht die Pflicht), das Basiswertpapier S zum Zeitpunkt T zu einem **vorher vereinbarten Strike-Preis K** zu verkaufen.

$$\text{Zufällige Auszahlung} \; = \; (K - S_T(\omega))^+ = \max\{K - S_T(\omega), 0\}.$$

- **Bonuszertifikat**: $K_1, K_2 \in \mathbb{R}_+$ mit $K_1 < \min\{K_2, S_0\}$

  Zufällige Auszahlung:

$$\max\{S_T(\omega), K_2\} 1_{\{S_t(\omega) \geq K_1 \; \forall t \in [0,T]\}} + S_T(\omega) 1_{\{\exists t \in [0,T] S_t(\omega) < K_1\}}$$

  K_1: Barriere, K_2: Bonusgrenze

  Achtung: Bei Zertifikaten Ausfallrisiko des Emittenten beachten (Lehman-Zertifikate)

- **Frage**: Lässt sich im Rahmen eines wahrscheinlichkeitstheoretischen Modells die Derivateauszahlung durch dynamischen Handel des Basiswertpapiers sicher replizieren ?
- Mathematisch: Existiert eine zulässige Handelsstrategie $(\varphi_t)_{t\in[0,T]}$ (vorhersehbarer stochastischer Prozess, φ_t **Anzahl** an Aktien zum Zeitpunkt t) und ein Startkapital $v \in \mathbb{R}$, so dass

$$P\left(v + \int_0^T \varphi_t \, dS_t = h\left((S_t)_{t\in[0,T]}\right)\right) = 1$$

  Problem: Auszahlung hängt **nichtlinear** von S_T ab bzw. oft sogar vom gesamten Pfad
- Das stochastische Integral $\int_0^T \varphi_t \, dS_t$ ist ein mathematisch interessantes Objekt, da Preisprozess $(S_t)_{t\in[0,T]}$ i.d.R. unendliche Variation besitzt
- Zunächst aber ganz einfaches Modell . . .

- **Frage**: Lässt sich im Rahmen eines wahrscheinlichkeitstheoretischen Modells die Derivateauszahlung durch dynamischen Handel des Basiswertpapiers sicher replizieren ?
- Mathematisch: Existiert eine zulässige Handelsstrategie $(\varphi_t)_{t\in[0,T]}$ (vorhersehbarer stochastischer Prozess, φ_t **Anzahl** an Aktien zum Zeitpunkt t) und ein Startkapital $v \in \mathbb{R}$, so dass

$$P\left(v + \int_0^T \varphi_t \, dS_t = h\left((S_t)_{t\in[0,T]}\right)\right) = 1$$

Problem: Auszahlung hängt **nichtlinear** von S_T ab bzw. oft sogar vom gesamten Pfad

- Das stochastische Integral $\int_0^T \varphi_t \, dS_t$ ist ein mathematisch interessantes Objekt, da Preisprozess $(S_t)_{t\in[0,T]}$ i.d.R. unendliche Variation besitzt
- Zunächst aber ganz einfaches Modell ...

- **Frage**: Lässt sich im Rahmen eines wahrscheinlichkeitstheoretischen Modells die Derivateauszahlung durch dynamischen Handel des Basiswertpapiers sicher replizieren ?
- Mathematisch: Existiert eine zulässige Handelsstrategie $(\varphi_t)_{t\in[0,T]}$ (vorhersehbarer stochastischer Prozess, φ_t **Anzahl** an Aktien zum Zeitpunkt t) und ein Startkapital $v \in \mathbb{R}$, so dass

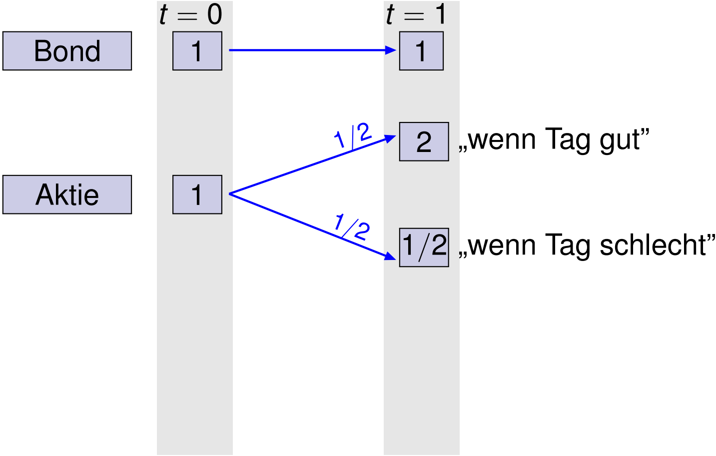
$$P\left(v + \int_0^T \varphi_t \, dS_t = h\left((S_t)_{t\in[0,T]}\right)\right) = 1$$

  Problem: Auszahlung hängt **nichtlinear** von S_T ab bzw. oft sogar vom gesamten Pfad
- Das stochastische Integral $\int_0^T \varphi_t \, dS_t$ ist ein mathematisch interessantes Objekt, da Preisprozess $(S_t)_{t\in[0,T]}$ i.d.R. unendliche Variation besitzt
- Zunächst aber ganz einfaches Modell …

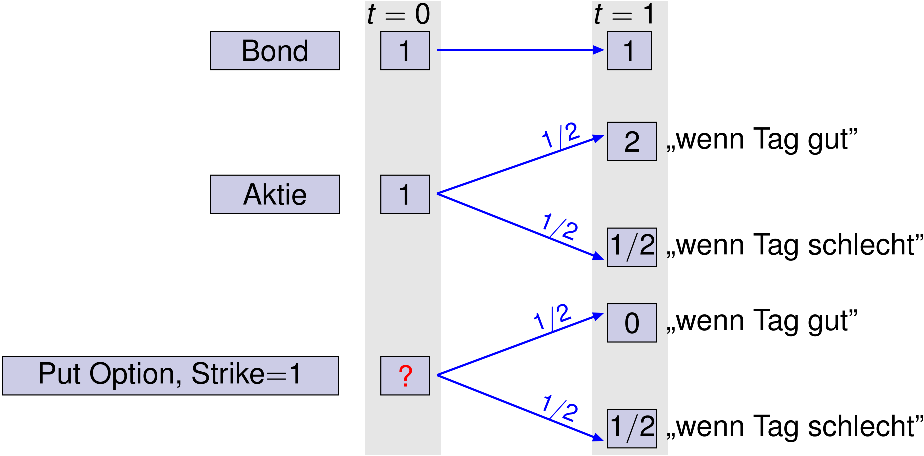
- **Frage**: Lässt sich im Rahmen eines wahrscheinlichkeitstheoretischen Modells die Derivateauszahlung durch dynamischen Handel des Basiswertpapiers sicher replizieren ?
- Mathematisch: Existiert eine zulässige Handelsstrategie $(\varphi_t)_{t\in[0,T]}$ (vorhersehbarer stochastischer Prozess, φ_t **Anzahl** an Aktien zum Zeitpunkt t) und ein Startkapital $v \in \mathbb{R}$, so dass

  $$P\left(v + \int_0^T \varphi_t \, dS_t = h\left((S_t)_{t\in[0,T]}\right)\right) = 1$$

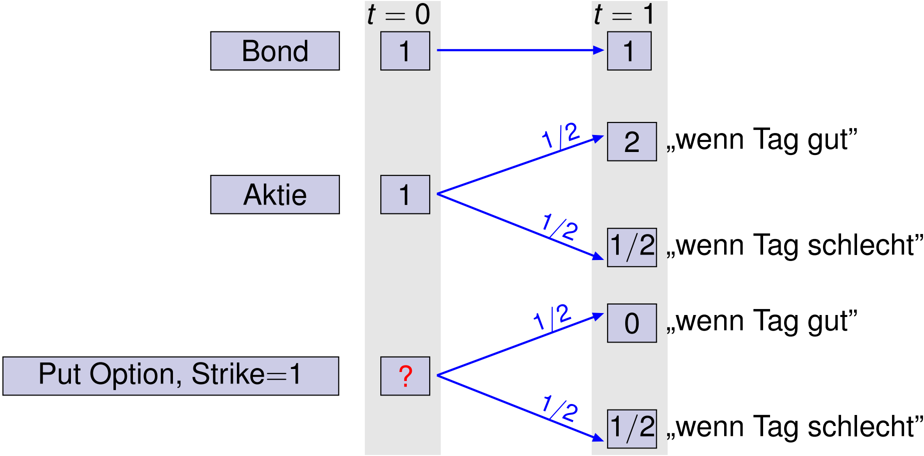
  Problem: Auszahlung hängt **nichtlinear** von S_T ab bzw. oft sogar vom gesamten Pfad
- Das stochastische Integral $\int_0^T \varphi_t \, dS_t$ ist ein mathematisch interessantes Objekt, da Preisprozess $(S_t)_{t\in[0,T]}$ i.d.R. unendliche Variation besitzt
- Zunächst aber ganz einfaches Modell ...



t = 0
t = 1
Bond
1
1
Aktie
1
1/2
2
„wenn Tag gut”
1/2
1/2
„wenn Tag schlecht”



Put-Option: Halter besitzt das Recht (aber nicht die Pflicht) zum Zeitpunkt $t = 1$ eine Aktie zum Strike-Preis 1 zu verkaufen.



Auszahlung der Put-Option lässt sich durch Aktie und Bond **replizieren**: Kaufe in $t = 0$ $\lambda = -\frac{1}{3}$ Aktien und $\mu = \frac{2}{3}$ Bonds.

$$\left.\begin{aligned} 2\lambda + \mu &= 0 \\ \tfrac{1}{2}\lambda + \mu &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}\right\} \iff \lambda = -\frac{1}{3}\,,\ \mu = \frac{2}{3}$$

$$\text{Optionswert}_{t=1} = -\frac{1}{3} \cdot \text{Aktienwert}_{t=1} + \frac{2}{3} \cdot 1 \quad \text{in beiden Zuständen}$$

$$p := \text{Optionpreis}_{t=0} \stackrel{!}{=} \text{Replikationskosten} = -\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

Jeder andere Optionspreis als $1/3$ würde eine „Arbitrage” (risikolose Gewinnmöglichkeit) ermöglichen.

Beobachtung: W-Maß P geht nicht in Optionspreis ein !

$E_P(\text{Auszahlung des Puts}) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} < \frac{1}{3}$.

$$\text{Optionswert}_{t=1} = -\frac{1}{3} \cdot \text{Aktienwert}_{t=1} + \frac{2}{3} \cdot 1 \quad \text{in beiden Zuständen}$$

$$p := \text{Optionpreis}_{t=0} \overset{!}{=} \text{Replikationskosten} = -\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

Jeder andere Optionspreis als $1/3$ würde eine „Arbitrage" (risikolose Gewinnmöglichkeit) ermöglichen.

Beobachtung: W-Maß P geht nicht in Optionspreis ein !

$E_P(\text{Auszahlung des Puts}) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} < \frac{1}{3}.$

Allgemeiner: gegeben beliebiger **Claim** (zufällige Auszahlung, abhängig von Aktienpreis in $t = 1$), $(h_g, h_s) \in \mathbb{R}^2$.

$$\left.\begin{aligned} 2\lambda + \mu &= h_g \\ \tfrac{1}{2}\lambda + \mu &= h_s \end{aligned}\right\} \quad \Leftrightarrow \lambda = \frac{h_g - h_s}{2 - 1/2}, \ \mu = \frac{4h_s - h_g}{3}$$

$\Rightarrow$ jeder Claim lässt sich replizieren

Sei $S_1(\omega)$ (zufälliger) Aktienkurs zum Zeitpunkt 1 und $H(\omega)$ (zufälliger) Claim

$\text{Preis}(H) + \lambda(S_1(\omega) - S_0) = H(\omega), \omega \in \{\text{guter Tag, schlechter Tag}\}$

Finde „künstliches" Wahrscheinlichkeits-Maß Q mit $E_Q(S_1 - S_0) = 0$.

$$\Rightarrow \quad \text{Preis}(H) = E_Q(H).$$

Hier Q eindeutig: $Q(\{\text{guterTag}\}) = \frac{1}{3}$ und $Q(\{\text{schlechterTag}\}) = \frac{2}{3}$
Q heißt Martingalmaß.

Allgemeiner: gegeben beliebiger **Claim** (zufällige Auszahlung, abhängig von Aktienpreis in $t = 1$), $(h_g, h_s) \in \mathbb{R}^2$.

$$\left.\begin{array}{l} 2\lambda + \mu \quad = h_g \\ \frac{1}{2}\lambda + \mu = h_s \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \lambda = \frac{h_g - h_s}{2 - 1/2}, \ \mu = \frac{4h_s - h_g}{3}$$

$\Rightarrow$ jeder Claim lässt sich replizieren

Sei $S_1(\omega)$ (zufälliger) Aktienkurs zum Zeitpunkt 1 und $H(\omega)$ (zufälliger) Claim

$\text{Preis}(H) + \lambda(S_1(\omega) - S_0) = H(\omega), \omega \in \{\text{guter Tag, schlechter Tag}\}$

Finde „künstliches" Wahrscheinlichkeits-Maß Q mit $E_Q(S_1 - S_0) = 0$.

$$\Rightarrow \quad \text{Preis}(H) = E_Q(H).$$

Hier Q eindeutig: $Q(\{\mathrm{guterTag}\}) = \frac{1}{3}$ und $Q(\{\mathrm{schlechterTag}\}) = \frac{2}{3}$
Q heißt Martingalmaß.

Allgemeiner: gegeben beliebiger **Claim** (zufällige Auszahlung, abhängig von Aktienpreis in $t = 1$), $(h_g, h_s) \in \mathbb{R}^2$.

$$\left.\begin{aligned} 2\lambda + \mu &= h_g \\ \tfrac{1}{2}\lambda + \mu &= h_s \end{aligned}\right\} \quad \Leftrightarrow \lambda = \frac{h_g - h_s}{2 - 1/2}, \ \mu = \frac{4h_s - h_g}{3}$$

$\Rightarrow$ jeder Claim lässt sich replizieren

Sei $S_1(\omega)$ (zufälliger) Aktienkurs zum Zeitpunkt 1 und $H(\omega)$ (zufälliger) Claim

Preis$(H) + \lambda(S_1(\omega) - S_0) = H(\omega), \omega \in \{$guter Tag, schlechter Tag$\}$

Finde „künstliches" Wahrscheinlichkeits-Maß Q mit $E_Q(S_1 - S_0) = 0$.

$$\Rightarrow \quad \text{Preis}(H) = E_Q(H).$$

Hier Q eindeutig: $Q(\{\text{guterTag}\}) = \frac{1}{3}$ und $Q(\{\text{schlechterTag}\}) = \frac{2}{3}$
Q heißt Martingalmaß.

Allgemeiner: gegeben beliebiger **Claim** (zufällige Auszahlung, abhängig von Aktienpreis in $t = 1$), $(h_g, h_s) \in \mathbb{R}^2$.

$$\left.\begin{array}{l} 2\lambda + \mu \quad = h_g \\ \frac{1}{2}\lambda + \mu = h_s \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \lambda = \frac{h_g - h_s}{2 - 1/2}, \ \mu = \frac{4h_s - h_g}{3}$$

$\Rightarrow$ jeder Claim lässt sich replizieren

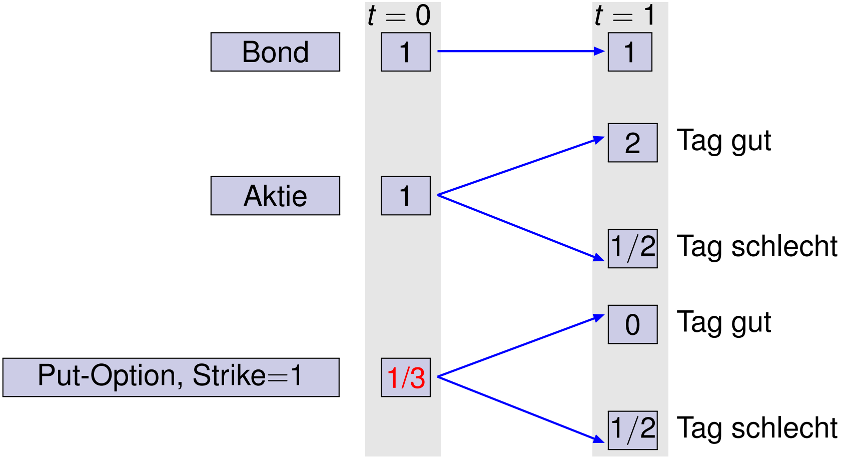
Sei $S_1(\omega)$ (zufälliger) Aktienkurs zum Zeitpunkt 1 und $H(\omega)$ (zufälliger) Claim

$\text{Preis}(H) + \lambda(S_1(\omega) - S_0) = H(\omega), \omega \in \{\text{guter Tag, schlechter Tag}\}$

Finde „künstliches" Wahrscheinlichkeits-Maß Q mit $E_Q(S_1 - S_0) = 0$.

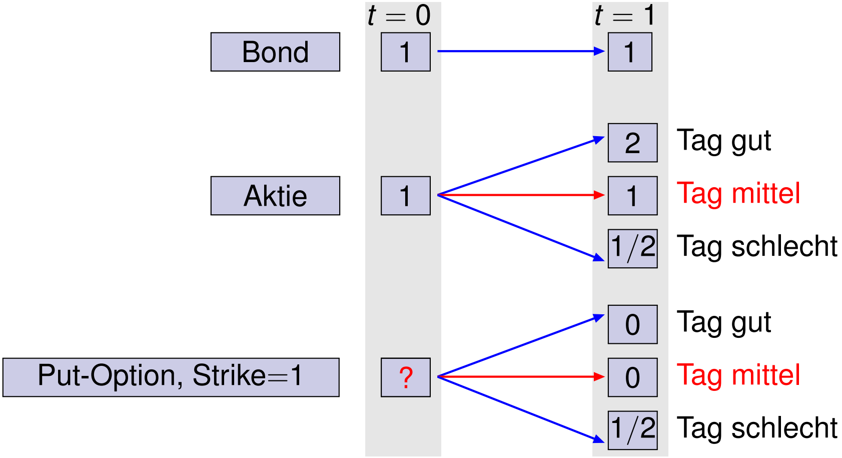
$$\Rightarrow \quad \text{Preis}(H) = E_Q(H).$$

Hier Q eindeutig: $Q(\{\text{guterTag}\}) = \frac{1}{3}$ und $Q(\{\text{schlechterTag}\}) = \frac{2}{3}$
***Q* heißt Martingalmaß.**



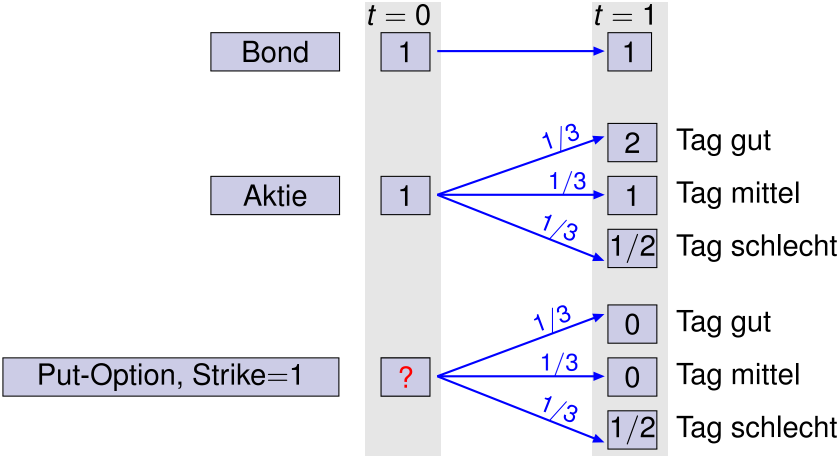
Auszahlung der Put-Option lässt sich durch Aktie und Bond **nicht** replizieren:

$$\left.\begin{aligned} 2\lambda + \mu &= 0 \\ \lambda + \mu &= 0 \\ \tfrac{1}{2}\lambda + \mu &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \textit{keine}\ \text{Lösung}$$



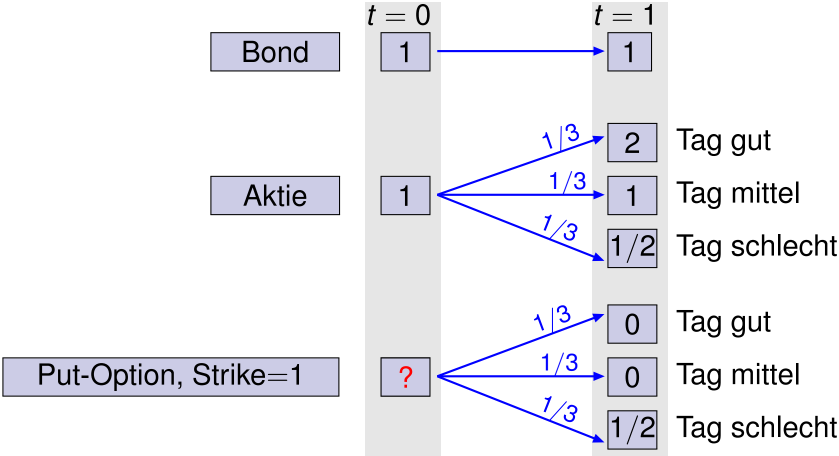
Auszahlung der Put-Option lässt sich durch Aktie und Bond **nicht** replizieren:

$$\left.\begin{aligned} 2\lambda + \mu &= 0 \\ \lambda + \mu &= 0 \\ \tfrac{1}{2}\lambda + \mu &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \textit{keine}\ \text{Lösung}$$



Auszahlung der Put-Option lässt sich durch Aktie und Bond **nicht** replizieren:

$$\left.\begin{aligned} 2\lambda + \mu &= 0 \\ \lambda + \mu &= 0 \\ \tfrac{1}{2}\lambda + \mu &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad \textit{keine}\ \text{Lösung}$$



Auszahlung der Put-Option lässt sich durch Aktie und Bond **nicht** replizieren:

$$\left.\begin{aligned} 2\lambda + \mu &= 0 \\ \lambda + \mu &= 0 \\ \tfrac{1}{2}\lambda + \mu &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad \textit{keine}\ \text{Lösung}$$

Nutzenindifferenzpreise

p^h heißt **Indifferenzpreis** für Derivateauszahlung $h(S_T)$, wenn Bank bei Preis p^h indifferent ist, ob sie Derivat emittieren soll oder nicht.

Exponentialnutzen: $u(X) = E\left[-\exp(-\alpha X)\right]$, $\alpha > 0$ **Risikoaversion**

- $p^h \in \mathbb{R}$ ist eindeutig definiert durch folgende Gleichung

$$\sup_{\varphi} E\left[-\exp\left(-\alpha\left(p^h - h(S_T) + \int_0^T \varphi_t \, dS_t\right)\right)\right] = \sup_{\varphi} E\left[-\exp\left(-\alpha \int_0^T \varphi_t \, dS_t\right)\right]$$

  Nutzen mit Derivategeschäft $\stackrel{!}{=}$ Nutzen ohne Derivategeschäft

- $h \mapsto p^h$: **Exponentialprinzip** aus der Versicherungsmathematik, das aber (partieller) Replizierbarkeit von $h(S_T)$ Rechnung trägt.
- **Hedging-Strategie** $:= \widehat{\varphi}$(with claim) $-$ $\widehat{\varphi}$(without Claim)
- Falls $h(S_T)$ replizierbar, stimmt obige Hedging-Strategie mit Replikationsstrategie überein und $p^h =$ Replikationskosten (Black-Scholes-Preis).
- Annahme: S hängt nicht von φ ab („kein Rückkoppelungseffekt")

Nutzenindifferenzpreise

p^h heißt **Indifferenzpreis** für Derivateauszahlung $h(S_T)$, wenn Bank bei Preis p^h indifferent ist, ob sie Derivat emittieren soll oder nicht.

Exponentialnutzen: $u(X) = E\left[-\exp(-\alpha X)\right]$, $\alpha > 0$ **Risikoaversion**

- $p^h \in \mathbb{R}$ ist eindeutig definiert durch folgende Gleichung

$$\sup_{\varphi} E\left[-\exp(-\alpha(p^h - h(S_T) + \int_0^T \varphi_t \, dS_t))\right] = \sup_{\varphi} E\left[-\exp(-\alpha \int_0^T \varphi_t \, dS_t)\right]$$

  Nutzen mit Derivategeschäft $\stackrel{!}{=}$ Nutzen ohne Derivategeschäft

- $h \mapsto p^h$: **Exponentialprinzip** aus der Versicherungsmathematik, das aber (partieller) Replizierbarkeit von $h(S_T)$ Rechnung trägt.
- **Hedging-Strategie** $:= \widehat{\varphi}$(with claim) $- \widehat{\varphi}$(without Claim)
- Falls $h(S_T)$ replizierbar, stimmt obige Hedging-Strategie mit Replikationsstrategie überein und $p^h =$ Replikationskosten (Black-Scholes-Preis).
- Annahme: S hängt nicht von φ ab („kein Rückkoppelungseffekt")

Nutzenindifferenzpreise

p^h heißt **Indifferenzpreis** für Derivateauszahlung $h(S_T)$, wenn Bank bei Preis p^h indifferent ist, ob sie Derivat emittieren soll oder nicht.

Exponentialnutzen: $u(X) = E\left[-\exp(-\alpha X)\right]$, $\alpha > 0$ **Risikoaversion**

- $p^h \in \mathbb{R}$ ist eindeutig definiert durch folgende Gleichung

$$\sup_{\varphi} E\left[-\exp\left(-\alpha\left(p^h - h(S_T) + \int_0^T \varphi_t\, dS_t\right)\right)\right] = \sup_{\varphi} E\left[-\exp\left(-\alpha \int_0^T \varphi_t\, dS_t\right)\right]$$

  Nutzen mit Derivategeschäft $\stackrel{!}{=}$ Nutzen ohne Derivategeschäft

- $h \mapsto p^h$: **Exponentialprinzip** aus der Versicherungsmathematik, das aber (partieller) Replizierbarkeit von $h(S_T)$ Rechnung trägt.
- **Hedging-Strategie** $:= \widehat{\varphi}(\text{with claim}) - \widehat{\varphi}(\text{without Claim})$
- Falls $h(S_T)$ replizierbar, stimmt obige Hedging-Strategie mit Replikationsstrategie überein und $p^h =$ Replikationskosten (Black-Scholes-Preis).
- Annahme: S hängt nicht von φ ab („kein Rückkoppelungseffekt”)

Nutzenindifferenzpreise

p^h heißt **Indifferenzpreis** für Derivateauszahlung $h(S_T)$, wenn Bank bei Preis p^h indifferent ist, ob sie Derivat emittieren soll oder nicht.

Exponentialnutzen: $u(X) = E\left[-\exp(-\alpha X)\right]$, $\alpha > 0$ **Risikoaversion**

- $p^h \in \mathbb{R}$ ist eindeutig definiert durch folgende Gleichung

$$\sup_{\varphi} E\left[-\exp\left(-\alpha\left(p^h - h(S_T) + \int_0^T \varphi_t \, dS_t\right)\right)\right] = \sup_{\varphi} E\left[-\exp\left(-\alpha \int_0^T \varphi_t \, dS_t\right)\right]$$

  Nutzen mit Derivategeschäft $\stackrel{!}{=}$ Nutzen ohne Derivategeschäft

- $h \mapsto p^h$: **Exponentialprinzip** aus der Versicherungsmathematik, das aber (partieller) Replizierbarkeit von $h(S_T)$ Rechnung trägt.
- **Hedging-Strategie** $:= \widehat{\varphi}(\text{with claim}) - \widehat{\varphi}(\text{without Claim})$
- Falls $h(S_T)$ replizierbar, stimmt obige Hedging-Strategie mit Replikationsstrategie überein und $p^h =$ Replikationskosten (Black-Scholes-Preis).
- Annahme: S hängt nicht von φ ab („kein Rückkoppelungseffekt")

Nutzenindifferenzpreise

p^h heißt **Indifferenzpreis** für Derivateauszahlung $h(S_T)$, wenn Bank bei Preis p^h indifferent ist, ob sie Derivat emittieren soll oder nicht.

Exponentialnutzen: $u(X) = E[-\exp(-\alpha X)]$, $\alpha > 0$ **Risikoaversion**

- $p^h \in \mathbb{R}$ ist eindeutig definiert durch folgende Gleichung

$$\sup_\varphi E\left[-\exp(-\alpha(p^h - h(S_T) + \int_0^T \varphi_t\, dS_t))\right] = \sup_\varphi E\left[-\exp(-\alpha \int_0^T \varphi_t\, dS_t)\right]$$

  Nutzen mit Derivategeschäft $\stackrel{!}{=}$ Nutzen ohne Derivategeschäft

- $h \mapsto p^h$: **Exponentialprinzip** aus der Versicherungsmathematik, das aber (partieller) Replizierbarkeit von $h(S_T)$ Rechnung trägt.
- **Hedging-Strategie** $:= \widehat{\varphi}(\text{with claim}) - \widehat{\varphi}(\text{without Claim})$
- Falls $h(S_T)$ replizierbar, stimmt obige Hedging-Strategie mit Replikationsstrategie überein und $p^h =$ Replikationskosten (Black-Scholes-Preis).
- Annahme: S hängt nicht von φ ab („kein Rückkoppelungseffekt")

Nutzenindifferenzpreise

p^h heißt **Indifferenzpreis** für Derivateauszahlung $h(S_T)$, wenn Bank bei Preis p^h indifferent ist, ob sie Derivat emittieren soll oder nicht.

Exponentialnutzen: $u(X) = E\left[-\exp(-\alpha X)\right]$, $\alpha > 0$ **Risikoaversion**

- $p^h \in \mathbb{R}$ ist eindeutig definiert durch folgende Gleichung

$$\sup_{\varphi} E\left[-\exp\left(-\alpha\left(p^h - h(S_T) + \int_0^T \varphi_t \, dS_t\right)\right)\right] = \sup_{\varphi} E\left[-\exp\left(-\alpha \int_0^T \varphi_t \, dS_t\right)\right]$$

  Nutzen mit Derivategeschäft $\stackrel{!}{=}$ Nutzen ohne Derivategeschäft

- $h \mapsto p^h$: **Exponentialprinzip** aus der Versicherungsmathematik, das aber (partieller) Replizierbarkeit von $h(S_T)$ Rechnung trägt.
- **Hedging-Strategie** $:= \widehat{\varphi}(\text{with claim}) - \widehat{\varphi}(\text{without Claim})$
- Falls $h(S_T)$ replizierbar, stimmt obige Hedging-Strategie mit Replikationsstrategie überein und $p^h =$ Replikationskosten (Black-Scholes-Preis).
- Annahme: S hängt nicht von φ ab („kein Rückkoppelungseffekt")

Nutzenindifferenzpreise

p^h heißt **Indifferenzpreis** für Derivateauszahlung $h(S_T)$, wenn Bank bei Preis p^h indifferent ist, ob sie Derivat emittieren soll oder nicht.

Exponentialnutzen: $u(X) = E\left[-\exp(-\alpha X)\right]$, $\alpha > 0$ **Risikoaversion**

- $p^h \in \mathbb{R}$ ist eindeutig definiert durch folgende Gleichung

$$\sup_{\varphi} E\left[-\exp\left(-\alpha\left(p^h - h(S_T) + \int_0^T \varphi_t \, dS_t\right)\right)\right] = \sup_{\varphi} E\left[-\exp\left(-\alpha \int_0^T \varphi_t \, dS_t\right)\right]$$

  Nutzen mit Derivategeschäft $\overset{!}{=}$ Nutzen ohne Derivategeschäft

- $h \mapsto p^h$: **Exponentialprinzip** aus der Versicherungsmathematik, das aber (partieller) Replizierbarkeit von $h(S_T)$ Rechnung trägt.
- **Hedging-Strategie** $:= \widehat{\varphi}(\text{with claim}) - \widehat{\varphi}(\text{without Claim})$
- Falls $h(S_T)$ replizierbar, stimmt obige Hedging-Strategie mit Replikationsstrategie überein und $p^h =$ Replikationskosten (Black-Scholes-Preis).
- Annahme: S hängt nicht von φ ab („kein Rückkoppelungseffekt”)

Preiseinfluss auf Basiswertpapier

- In der Realität beobachtet man jedoch z.B. starke Handelsaktivität, wenn Derivate fällig werden („**Hexensabbats**").
- Marktteilnehmer scheinen daher Preiseinfluss auszuüben.
- Jüngeres Beispiel: Volkswagen

  Financial Times vom 30. Oktober 2008:
  “Germany’s financial watchdog will formally investigate possible market manipulation of Volkswagen’s shares after wild swings in the carmaker’s value left hedge funds facing losses of billions of euros”.

Preiseinfluss auf Basiswertpapier

- In der Realität beobachtet man jedoch z.B. starke Handelsaktivität, wenn Derivate fällig werden („**Hexensabbats**").
- Marktteilnehmer scheinen daher Preiseinfluss auszuüben.
- Jüngeres Beispiel: Volkswagen

  Financial Times vom 30. Oktober 2008:
  “Germany’s financial watchdog will formally investigate possible market manipulation of Volkswagen’s shares after wild swings in the carmaker’s value left hedge funds facing losses of billions of euros”.

Financial Times vom 29 Oct 2008:
[. . .] At its intra-day peak of 1,005 euros, its market capitalisation exceeded Exxon, the US oil company. This has raised fears over a "squeeze" on traders betting on a fall in Volkswagen shares through short-selling [. . .]. An manager at a large hedge fund said: "The losses will be extreme. I don't think it is going to bring down a big fund, but it will probably bring down some small ones." One London-based auto analyst said: "I have hedge fund managers literally in tears on the phone."

Fragestellung

- Gegeben diese empirischen Hinweise auf Markteinfluss werden wir optimale Manipulationsstrategien von großen Marktteilnehmern mit Preiseinfluss (“large trader"), die Derivatepositionen halten, untersuchen.
- Beispiel Hedge Fonds im Fall VW
- Wie veränderen sich Nutzenindifferenzpreise bei Preiseinfluss ?

Modell Kraft und K. (2009)

- Investitionsalternativen des großen Investors

  (1) Geldmarktkonto mit risikolosem Zinssatz Null
  (2) risikobehaftete Small-Cap Aktie S, deren Driftrate durch Position $(\theta_t)_{t\in[0,T]}$ (**€-Betrag** investiert in Aktie) des großen Investors beeinflusst wird.

- Preisdynamik der Aktie: $dS_t = S_t\left[(\mu_0 + \mu_1\theta_t)\,dt + \sigma\,dW_t\right]$
  typischerweise: $\mu_1 < 0$, "squeezing" ($\mu_1 > 0$, "herding")

- Daraus resultiert folgender Handelsgewinnprozess X des Investors: $X_0 = 0$ und

$$dX_t = \frac{\theta_t}{S_t}\,dS_t = \theta_t(\mu_0 + \mu_1\theta_t)\,dt + \theta_t\sigma\,dW_t$$

- Gesamtvermögen in $T = p^h - h(S_T) + X_T$

- Longpositionen können durch $h \leq 0$ modelliert werden.

Modell Kraft und K. (2009)

- Investitionsalternativen des großen Investors
  (1) Geldmarktkonto mit risikolosem Zinssatz Null
  (2) risikobehaftete Small-Cap Aktie S, deren Driftrate durch Position $(\theta_t)_{t\in[0,T]}$ (**€-Betrag** investiert in Aktie) des großen Investors beeinflusst wird.
- Preisdynamik der Aktie: $dS_t = S_t\,[(\mu_0 + \mu_1\theta_t)\,dt + \sigma\,dW_t]$
  typischerweise: $\mu_1 < 0$, "squeezing" ($\mu_1 > 0$, "herding")
- Daraus resultiert folgender Handelsgewinnprozess X des Investors: $X_0 = 0$ und

$$dX_t = \frac{\theta_t}{S_t}\,dS_t = \theta_t(\mu_0 + \mu_1\theta_t)\,dt + \theta_t\sigma\,dW_t$$

- Gesamtvermögen in $T = p^h - h(S_T) + X_T$
- Longpositionen können durch $h \leq 0$ modelliert werden.

Modell Kraft und K. (2009)

- Investitionsalternativen des großen Investors
  (1) Geldmarktkonto mit risikolosem Zinssatz Null
  (2) risikobehaftete Small-Cap Aktie S, deren Driftrate durch Position $(\theta_t)_{t\in[0,T]}$ (**€-Betrag** investiert in Aktie) des großen Investors beeinflusst wird.
- Preisdynamik der Aktie: $dS_t = S_t\left[(\mu_0 + \mu_{\mathbf{1}}\theta_{\mathbf{t}})\,dt + \sigma\,dW_t\right]$
  typischerweise: $\mu_1 < 0$, "squeezing" ($\mu_1 > 0$, "herding")
- Daraus resultiert folgender Handelsgewinnprozess X des Investors: $X_0 = 0$ und

$$dX_t = \frac{\theta_t}{S_t}\,dS_t = \theta_t(\mu_0 + \mu_1\theta_t)\,dt + \theta_t\sigma\,dW_t$$

- Gesamtvermögen in $T = p^h - h(S_T) + X_T$
- Longpositionen können durch $h \leq 0$ modelliert werden.

Modell Kraft und K. (2009)

- Investitionsalternativen des großen Investors
  (1) Geldmarktkonto mit risikolosem Zinssatz Null
  (2) risikobehaftete Small-Cap Aktie S, deren Driftrate durch Position $(\theta_t)_{t\in[0,T]}$ (**€-Betrag** investiert in Aktie) des großen Investors beeinflusst wird.
- Preisdynamik der Aktie: $dS_t = S_t\left[(\mu_0 + \mu_1\theta_t)\,dt + \sigma\,dW_t\right]$
  typischerweise: $\mu_1 < 0$, “squeezing” ($\mu_1 > 0$, “herding”)
- Daraus resultiert folgender Handelsgewinnprozess X des Investors: $X_0 = 0$ und

$$dX_t = \frac{\theta_t}{S_t}\,dS_t = \theta_t(\mu_0 + \mu_1\theta_t)\,dt + \theta_t\sigma\,dW_t$$

- Gesamtvermögen in $T = p^h - h(S_T) + X_T$
- Longpositionen können durch $h \le 0$ modelliert werden.

Modell

Preisdynamik der Aktie: $dS_t = S_t \left[(\mu_0 + \mu_1 \theta_t)\, dt + \sigma\, dW_t \right]$

- Beobachtung: trotz Preiseinfluss könnte großer Investor den Claim $h(S_T)$ zu gleichen Kosten wie ohne Preiseinfluss (Standard Black-Scholes Modell) perfekt replizieren !
- *Eine* Begründung: Driftrate geht nicht in „Martingalmaß" ein. Replikationskosten = Erwartungswert unter Martingalmaß
- Durch den Preiseinfluss ist dies aber i.A. nicht mehr optimal
- Tradeoff:
  - **Hedgen** (Absicherung des Risikos durch Gegengeschäft)
  - **Manipulieren** (gezielte Beeinflussung der nicht-abgesicherten Derivateposition zu seinen Gunsten durch Handel in der Aktie)

Modell

Preisdynamik der Aktie: $dS_t = S_t\,[(\mu_0 + \mu_1\theta_t)\,dt + \sigma\,dW_t]$

- Beobachtung: trotz Preiseinfluss könnte großer Investor den Claim $h(S_T)$ zu gleichen Kosten wie ohne Preiseinfluss (Standard Black-Scholes Modell) perfekt replizieren !
- *Eine* Begründung: Driftrate geht nicht in „Martingalmaß" ein. Replikationskosten $=$ Erwartungswert unter Martingalmaß
- Durch den Preiseinfluss ist dies aber i.A. nicht mehr optimal
- Tradeoff:
  - **Hedgen** (Absicherung des Risikos durch Gegengeschäft)
  - **Manipulieren** (gezielte Beeinflussung der nicht-abgesicherten Derivateposition zu seinen Gunsten durch Handel in der Aktie)

$$\begin{aligned}&\sup_\theta E\left[-\exp(-\alpha(p^h - h(S_T(\theta)) + X_T(\theta)))\right]\\&= \sup_\theta E\left[-\exp(-\alpha(X_T(\theta)))\right]\end{aligned}$$

Nutzen mit Derivategeschäft $\stackrel{!}{=}$ Nutzen ohne Derivategeschäft

- Neu: $X_T(\theta)$ ist nicht mehr linear in Strategie θ.

Hedging-Manipulations-Strategie $:= \widehat{\theta}(\text{with claim}) - \widehat{\theta}(\text{without Claim})$

Ergebnisse:

- Hedging-Manipulations-Strategie $\rightarrow \theta^{\text{Black}-\text{Scholes}}$ wenn Risikoaversion $\alpha \rightarrow \infty$
- $h(S_T(\widehat{\theta}(\text{with Claim})) \rightarrow \min_{s\in\mathbb{R}_+} h(s)$, $\mu_1 \rightarrow -\infty$ (d.h. wenn Preiseinfluss immer größer wird), wobei

  $\widehat{\theta}$ = Replikation von nur $\varepsilon h(S_T)$ (treibt $h(S_T)$ in richtige Richtung).

  Bei Call/Put-Optionen $\min_{s\in\mathbb{R}_+} h(s) = 0$

  Folglich: $p^h \rightarrow \min_{s\in\mathbb{R}_+} h(s)$ für $\mu_1 \rightarrow -\infty$

$$
\begin{aligned}
&\sup_{\theta} E\left[-\exp(-\alpha(p^h - h(S_T(\theta)) + X_T(\theta)))\right] \\
&= \sup_{\theta} E\left[-\exp(-\alpha(X_T(\theta)))\right]
\end{aligned}
$$

Nutzen mit Derivategeschäft $\stackrel{!}{=}$ Nutzen ohne Derivategeschäft

- Neu: $X_T(\theta)$ ist nicht mehr linear in Strategie θ.

Hedging-Manipulations-Strategie $:= \widehat{\theta}(\text{with claim}) - \widehat{\theta}(\text{without Claim})$

Ergebnisse:

- Hedging-Manipulations-Strategie $\longrightarrow \theta^{\text{Black}-\text{Scholes}}$ wenn Risikoaversion $\alpha \to \infty$
- $h(S_T(\widehat{\theta}(\text{with Claim}))) \to \min_{s\in\mathbb{R}_+} h(s)$, $\quad \mu_1 \to -\infty$ (d.h. wenn Preiseinfluss immer größer wird), wobei

  $\widehat{\theta}$ = Replikation von nur $\varepsilon h(S_T)$ (treibt $h(S_T)$ in richtige Richtung).

  Bei Call/Put-Optionen $\min_{s\in\mathbb{R}_+} h(s) = 0$

  Folglich: $p^h \to \min_{s\in\mathbb{R}_+} h(s)$ für $\mu_1 \to -\infty$

$$
\begin{aligned}
&\sup_\theta E\left[-\exp(-\alpha(p^h - h(S_T(\theta)) + X_T(\theta)))\right] \\
&= \sup_\theta E\left[-\exp(-\alpha(X_T(\theta)))\right]
\end{aligned}
$$

Nutzen mit Derivategeschäft $\stackrel{!}{=}$ Nutzen ohne Derivategeschäft

- Neu: $X_T(\theta)$ ist nicht mehr linear in Strategie θ.

Hedging-Manipulations-Strategie $:= \widehat{\theta}$(with claim) $- \widehat{\theta}$(without Claim)

Ergebnisse:

- Hedging-Manipulations-Strategie $\rightarrow \theta^{\text{Black}-\text{Scholes}}$ wenn Risikoaversion $\alpha \rightarrow \infty$
- $h(S_T(\widehat{\theta}(\text{with Claim})) \rightarrow \min_{s \in \mathbb{R}_+} h(s)$, $\mu_1 \rightarrow -\infty$ (d.h. wenn Preiseinfluss immer größer wird), wobei

  $\widehat{\theta}$ = Replikation von nur $\varepsilon h(S_T)$ (treibt $h(S_T)$ in richtige Richtung).

  Bei Call/Put-Optionen $\min_{s \in \mathbb{R}_+} h(s) = 0$

  Folglich: $p^h \rightarrow \min_{s \in \mathbb{R}_+} h(s)$ für $\mu_1 \rightarrow -\infty$

$$
\begin{aligned}
&\sup_\theta E\left[-\exp(-\alpha(p^h - h(S_T(\theta)) + X_T(\theta)))\right] \\
&= \sup_\theta E\left[-\exp(-\alpha(X_T(\theta)))\right]
\end{aligned}
$$

Nutzen mit Derivategeschäft $\stackrel{!}{=}$ Nutzen ohne Derivategeschäft

- Neu: $X_T(\theta)$ ist nicht mehr linear in Strategie θ.

Hedging-Manipulations-Strategie $:= \widehat{\theta}$(with claim) $-$ $\widehat{\theta}$(without Claim)

Ergebnisse:

- Hedging-Manipulations-Strategie $\longrightarrow \theta^{\mathrm{Black-Scholes}}$ wenn Risikoaversion $\alpha \to \infty$
- $h(S_T(\widehat{\theta}(\text{with Claim})) \to \min_{s\in\mathbb{R}_+} h(s)$, $\quad \mu_1 \to -\infty$ (d.h. wenn Preiseinfluss immer größer wird), wobei

  $\widehat{\theta}$ = Replikation von nur $\varepsilon h(S_T)$ (treibt $h(S_T)$ in richtige Richtung).

  Bei Call/Put-Optionen $\min_{s\in\mathbb{R}_+} h(s) = 0$

  Folglich: $p^h \to \min_{s\in\mathbb{R}_+} h(s)$ für $\mu_1 \to -\infty$

$$
\begin{aligned}
&\sup_\theta E\left[-\exp(-\alpha(p^h - h(S_T(\theta)) + X_T(\theta)))\right] \\
&= \sup_\theta E\left[-\exp(-\alpha(X_T(\theta)))\right]
\end{aligned}
$$

Nutzen mit Derivategeschäft $\overset{!}{=}$ Nutzen ohne Derivategeschäft

- Neu: $X_T(\theta)$ ist nicht mehr linear in Strategie θ.

Hedging-Manipulations-Strategie $:= \widehat{\theta}(\text{with claim}) - \widehat{\theta}(\text{without Claim})$

Ergebnisse:

- Hedging-Manipulations-Strategie $\rightarrow \theta^{\text{Black}-\text{Scholes}}$ wenn Risikoaversion $\alpha \rightarrow \infty$
- $h(S_T(\widehat{\theta}(\text{with Claim})) \rightarrow \min_{s \in \mathbb{R}_+} h(s), \quad \mu_1 \rightarrow -\infty$ (d.h. wenn Preiseinfluss immer größer wird), wobei

  $\widehat{\theta}$ = Replikation von nur $\varepsilon h(S_T)$ (treibt $h(S_T)$ in richtige Richtung).

  Bei Call/Put-Optionen $\min_{s \in \mathbb{R}_+} h(s) = 0$

  Folglich: $p^h \rightarrow \min_{s \in \mathbb{R}_+} h(s)$ für $\mu_1 \rightarrow -\infty$

Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) Gleichung

Wertfunktion $G(t, x, s)$:

$G(t, x, s)$ = Erwartungsnutzen zum Zeitpunkt t, den Investor mit Vermögen x und Aktienkurs s bei optimalem Verhalten bis T erzielen kann.

$G(t, x, s)$ muss folgende Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) Gleichung erfüllen.

$$\max_{\vartheta \in \mathbb{R}} \Big\{ G_t + \vartheta(\mu_0 + \mu_1 \vartheta) G_x + (\mu_0 + \mu_1 \vartheta) s G_s + \frac{1}{2}(\sigma^2 \vartheta^2) G_{xx} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 G_{ss} + \sigma^2 \vartheta s G_{xs} \Big\} = 0$$

mit $G(T, x, s) = -\exp(-\alpha(x - h(s)))$.

Wertfunktion $G(t, x, s)$:

$G(t, x, s)$ = Erwartungsnutzen zum Zeitpunkt t, den Investor mit Vermögen x und Aktienkurs s bei optimalem Verhalten bis T erzielen kann.

$G(t, x, s)$ muss folgende Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) Gleichung erfüllen.

$$\max_{\vartheta \in \mathbb{R}} \Big\{ G_t + \vartheta(\mu_0 + \mu_1 \vartheta) G_x + (\mu_0 + \mu_1 \vartheta) s G_s + \frac{1}{2}(\sigma^2 \vartheta^2) G_{xx} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 G_{ss} + \sigma^2 \vartheta s G_{xs} \Big\} = 0$$

mit $G(T, x, s) = -\exp(-\alpha(x - h(s)))$.

Lösung der HJB-Gleichung

Ansatz für die Wertfunktion

$$G(t,x,s) = -\exp(-\alpha x) g(t,z)^{\beta}, \quad z = \ln(s)$$

und damit $g(T,z) = \exp\left(\frac{\alpha}{\beta} h(\exp(z))\right)$.

Einsetzen der optimale Aktienposition in HJB:

$$0 = -\frac{\beta}{\alpha} g_t - \frac{\gamma}{\alpha}(\mu_0 - \frac{1}{2}\sigma^2) g_z - \frac{1}{2}\frac{\gamma}{\alpha}\sigma^2 [(\beta - 1)\frac{g_z^2}{g} + g_{zz}]$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\left(\mu_0 g - \frac{\gamma}{\alpha}\mu_1 g_z + \beta\sigma^2 g_z\right)^2}{(\alpha\sigma^2 - 2\mu_1) g}$$

Terme mit $\frac{g_z^2}{g}$ fallen weg, falls β wie folgt gewählt wird:

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{(\sigma^2 - \mu_1/\alpha)^2}{\sigma^2(\sigma^2 - 2\mu_1/\alpha)}} < 0$$

Ansatz für die Wertfunktion

$$G(t,x,s) = -\exp(-\alpha x) g(t,z)^{\beta}, \quad z = \ln(s)$$

und damit $g(T,z) = \exp\left(\frac{\alpha}{\beta} h(\exp(z))\right)$.

Einsetzen der optimale Aktienposition in HJB:

$$\begin{aligned} 0 \quad = \quad & -\frac{\beta}{\alpha} g_t - \frac{\gamma}{\alpha}(\mu_0 - \frac{1}{2}\sigma^2) g_z - \frac{1}{2}\frac{\gamma}{\alpha}\sigma^2[(\beta-1)\frac{g_z^2}{g} + g_{zz}] \\ & + \frac{1}{2}\frac{\left(\mu_0 g - \frac{\gamma}{\alpha}\mu_1 g_z + \beta\sigma^2 g_z\right)^2}{(\alpha\sigma^2 - 2\mu_1) g} \end{aligned}$$

Terme mit $\frac{g_z^2}{g}$ fallen weg, falls β wie folgt gewählt wird:

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{(\sigma^2 - \mu_1/\alpha)^2}{\sigma^2(\sigma^2 - 2\mu_1/\alpha)}} < 0$$

Lösung der HJB-Gleichung

Ansatz für die Wertfunktion

$$G(t,x,s) = -\exp(-\alpha x) g(t,z)^{\beta}, \quad z = \ln(s)$$

und damit $g(T,z) = \exp\left(\frac{\alpha}{\beta} h(\exp(z))\right)$.

Einsetzen der optimale Aktienposition in HJB:

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & -\frac{\beta}{\alpha} g_t - \frac{\gamma}{\alpha}(\mu_0 - \frac{1}{2}\sigma^2) g_z - \frac{1}{2}\frac{\gamma}{\alpha}\sigma^2 [(\beta - 1)\frac{g_z^2}{g} + g_{zz}] \\ & + \frac{1}{2} \frac{\left(\mu_0 g - \frac{\gamma}{\alpha}\mu_1 g_z + \beta\sigma^2 g_z\right)^2}{(\alpha\sigma^2 - 2\mu_1) g} \end{aligned}$$

Terme mit $\frac{g_z^2}{g}$ fallen weg, falls β wie folgt gewählt wird:

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{(\sigma^2 - \mu_1/\alpha)^2}{\sigma^2(\sigma^2 - 2\mu_1/\alpha)}} < 0$$

$$g_t - \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\beta}\frac{\mu_0^2}{\alpha\sigma^2 - 2\mu_1}}_{=\widetilde{r}} g + \underbrace{\left(\mu_0 - \frac{1}{2}\sigma^2 - \frac{\mu_0(\alpha\sigma^2 - \mu_1)}{\alpha\sigma^2 - 2\mu_1}\right)}_{=\eta_Z} g_z + \frac{1}{2}\sigma^2 g_{zz} = 0.$$

Diese Black-Scholes ähnliche PDE besitzt stochastische Darstellung

$$g(t,z) = \exp(-\widetilde{r}(T-t))\widetilde{E}\left[\exp\left(\frac{\alpha}{\beta}h(\exp(Z_T)\right)\right], \quad \text{wobei}$$

Z_T normalverteilt mit Erwartungswert $\eta_Z \cdot (T-t)$ & Varianz $\sigma^2 \cdot (T-t)$.

Für den **Indifferenzpreis** folgt

$$p^h = \frac{1}{\frac{\alpha}{\beta}} \ln\left(\widetilde{E}\left[\exp\left(\frac{\alpha}{\beta}h(\exp(Z_T))\right)\right]\right).$$

Da $\beta < 0$ würde dies formal dem Exponentialprinzip mit der negativen Risikoaversion $\frac{\alpha}{\beta}$ entsprechen.

Folge: alles dreht sich auf den Kopf, Derivate größeren Volumens werden im Verhältnis billiger statt wie sonst (wegen größerem Risiko) teurer. Auch Derivat mit unendlichem Erwartungswert/Replikationskosten hat endlichen Preis.

$$g_t - \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\beta}\frac{\mu_0^2}{\alpha\sigma^2 - 2\mu_1}}_{=\widetilde{r}} g + \underbrace{\left(\mu_0 - \frac{1}{2}\sigma^2 - \frac{\mu_0(\alpha\sigma^2 - \mu_1)}{\alpha\sigma^2 - 2\mu_1}\right)}_{=\eta_Z} g_z + \frac{1}{2}\sigma^2 g_{zz} = 0.$$

Diese Black-Scholes ähnliche PDE besitzt stochastische Darstellung

$$g(t,z) = \exp(-\widetilde{r}(T-t))\widetilde{E}\left[\exp\left(\frac{\alpha}{\beta}h(\exp(Z_T)\right)\right], \quad \text{wobei}$$

Z_T normalverteilt mit Erwartungswert $\eta_Z \cdot (T-t)$ & Varianz $\sigma^2 \cdot (T-t)$.

Für den **Indifferenzpreis** folgt

$$p^h = \frac{1}{\frac{\alpha}{\beta}} \ln\left(\widetilde{E}\left[\exp\left(\frac{\alpha}{\beta}h(\exp(Z_T))\right)\right]\right).$$

Da $\beta < 0$ würde dies formal dem Exponentialprinzip mit der negativen Risikoaversion $\frac{\alpha}{\beta}$ entsprechen.

Folge: alles dreht sich auf den Kopf, Derivate größeren Volumens werden im Verhältnis billiger statt wie sonst (wegen größerem Risiko) teurer. Auch Derivat mit unendlichem Erwartungswert/Replikationskosten hat endlichen Preis.

$$g_t - \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\beta}\frac{\mu_0^2}{\alpha\sigma^2 - 2\mu_1}}_{=\widetilde{r}} g + \underbrace{\left(\mu_0 - \frac{1}{2}\sigma^2 - \frac{\mu_0(\alpha\sigma^2 - \mu_1)}{\alpha\sigma^2 - 2\mu_1}\right)}_{=\eta_Z} g_z + \frac{1}{2}\sigma^2 g_{zz} = 0.$$

Diese Black-Scholes ähnliche PDE besitzt stochastische Darstellung

$$g(t,z) = \exp(-\widetilde{r}(T-t))\widetilde{E}\left[\exp\left(\frac{\alpha}{\beta}h(\exp(Z_T)\right)\right], \quad \text{wobei}$$

Z_T normalverteilt mit Erwartungswert $\eta_Z \cdot (T-t)$ & Varianz $\sigma^2 \cdot (T-t)$.

Für den **Indifferenzpreis** folgt

$$p^h = \frac{1}{\frac{\alpha}{\beta}} \ln\left(\widetilde{E}\left[\exp\left(\frac{\alpha}{\beta}h(\exp(Z_T))\right)\right]\right).$$

Da $\beta < 0$ würde dies formal dem Exponentialprinzip mit der negativen Risikoaversion $\frac{\alpha}{\beta}$ entsprechen.

Folge: alles dreht sich auf den Kopf, Derivate größeren Volumens werden im Verhältnis billiger statt wie sonst (wegen größerem Risiko) teurer. Auch Derivat mit unendlichem Erwartungswert/Replikationskosten hat endlichen Preis.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit !