Analysis III
Gewöhnliche Differentialgleichungen
und
Funktionentheorie

Ausarbeitung einer Vorlesung

vom Wintersemester 1991/92

JOACHIM WEIDMANN

Fachbereich Mathematik
der Universität Frankfurt

August 1992

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Gewöhnliche Differentialgleichungen

1 Einführung

1.1 Grundbegriffe

Eine ***gewöhnliche Differentialgleichung der Ordnung*** $\mathbf{n}$ ist eine Gleichung der Form

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0\,,$$

wobei x eine reelle Variable ist und $y = y(x)$ eine gesuchte Funktion mit Werten in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. (Natürlich wird man nur dann sagen, die Gleichung ist von der Ordnung n, wenn F tatsächlich von $y^{(n)}$ abhängt; d. h. wir gehen davon aus, daß F keine „unnötigen" Variablen enthält). Auch Werte in $\mathbb{R}^m$ oder $\mathbb{C}^m$ sind möglich, $y = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$; man schreibt dann ausführlicher

$$F(x, \eta_1, \ldots, \eta_m,\, \eta_1', \ldots, \eta_m', \ldots, \eta_1^{(n)}, \ldots, \eta_m^{(n)}) = 0\,,$$

wobei dann i. allg. auch F vektorwertig sein wird, d. h. es handelt sich dann um ein System von Gleichungen. Die Bezeichnung „gewöhnliche Differentialgleichung" bezieht sich auf die Tatsache, daß nur „gewöhnliche" Ableitungen vorkommen (im Gegensatz zu „partiellen" Ableitungen in „partiellen Differentialgleichungen").

Die Funktion F ist auf einer Teilmenge

$$D \subset \mathbb{R}^{n+2} \quad \text{oder} \quad \mathbb{R} \times \mathbb{C}^{n+1} \quad \text{bzw.} \quad D \subset \mathbb{R}^{1+m(n+1)} \quad \text{oder} \quad \mathbb{R} \times \mathbb{C}^{m(n+1)}$$

erklärt. Eine ***Lösung*** der Differentialgleichung (in dem hier zur Diskussion stehenden elementaren Sinne) ist eine n mal stetig differenzierbare Funktion $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ $(\mathbb{C}, \mathbb{R}^m,$ oder $\mathbb{C}^m)$ auf einem Intervall I mit

$$\Big(x, \eta(x), \ldots, \eta^{(n)}(x)\Big) \in D \qquad \text{für alle} \qquad x \in I,$$

$$F\Big(x, \eta(x), \ldots, \eta^{(n)}(x)\Big) = 0 \qquad \text{für alle} \qquad x \in I\,.$$

Aus rein theoretischer Sicht genügt es, Differentialgleichungen der Ordnung 1 zu betrachten, d. h. Gleichungen (bzw. Systeme) der Form

$$\begin{aligned} &F(x,y,y') \,=\, 0 \quad \text{bzw.} \\ &F_j(x,\eta_1,\ldots,\eta_m,\eta_1',\ldots,\eta_m') = 0 \quad \text{für} \quad j=1,\ldots,k\,. \end{aligned}$$

Eine Gleichung (bzw. ein System) der Ordnung n kann ganz einfach in ein System von Gleichungen der Ordnung 1 übergeführt werden, indem man definiert:

$$Y = (\eta_1,\ldots,\eta_n) \;:=\; (y,y',\ldots,y^{(n-1)})$$

(wobei hier i. allg. $y_j \in \mathbb{R}^m$ oder $\mathbb{C}^m$ ist), und für diese vektorwertige Funktion die Gleichung

$$\tilde{F}(x,Y,Y') \,=\, 0$$

betrachtet mit

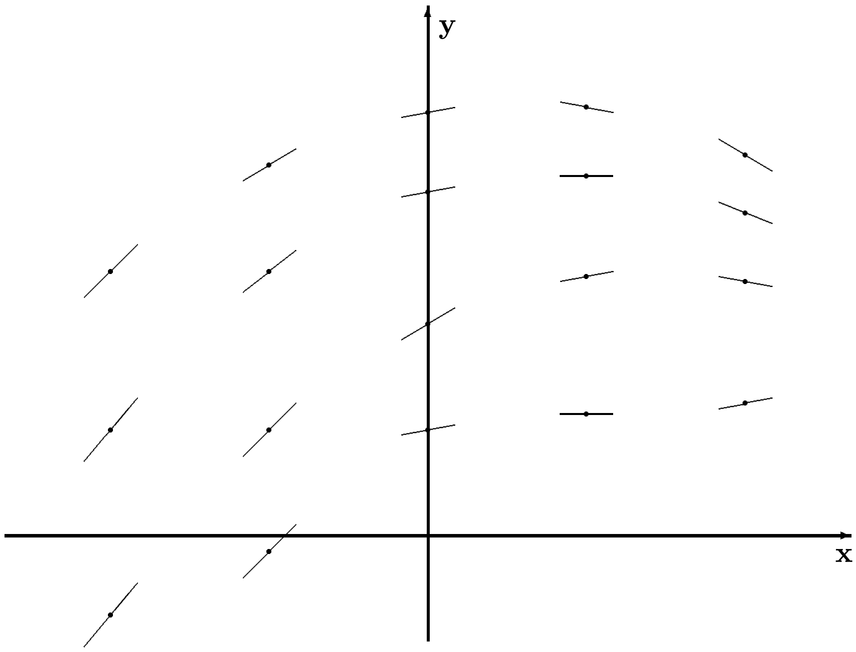
$$\tilde{F}(x,Y,Y') \,=\, \begin{pmatrix} \eta_1' - \eta_2 \\ \eta_2' - \eta_3 \\ \vdots \\ \eta_{n-1}' - \eta_n \\ F(x,\eta_1,\ldots,\eta_n,\eta_n') \end{pmatrix}.$$

Man sieht sofort, daß $y = \eta_1$ genau dann die ursprüngliche Gleichung $F(x,y,y',\ldots,y^{(n)}) = 0$ löst, wenn Y die Gleichung $\tilde{F}(x,Y,Y') \,=\, 0$ löst.

Gleichungen der bisher betrachteten allgemeinen Form heißen ***implizite Differentialgleichungen***. Sie sind nur selten in dieser Form lösbar. Wir gehen deshalb in der Regel davon aus, daß die Gleichung $F(x,y,y') = 0$ nach y' aufgelöst werden kann, also in der Form

$y' = f(x,y)$ ***explizite Differentialgleichung***

geschrieben werden kann.



Richtungsfeld

Gleichungen dieser Art können (im reellen Fall und für $m = 1$) leicht geometrisch gedeutet werden: Jedem Punkt $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ ist durch $y' = f(x, y)$ eine Steigung, also eine Richtung in der (x, y)–Ebene, zugeordnet. Die Gesamtheit dieser Richtungen wird als ***Richtungsfeld*** bezeichnet.

Die Lösungen der Differentialgleichung sind genau die Funktionen $y = y(x)$, für die in jedem Punkt des Graphen die Tangentialrichtung mit der durch $y' = f(x, y)$ vorgegebenen Richtung übereinstimmt. Häufig kann man so leicht qualitative Aussagen über die Lösungen finden. (Im Fall der impliziten Differentialgleichung gibt es dagegen u. U. in einem Punkt mehrere „zulässige“ Richtungen.)

1.2 Einfachste Differentialgleichungen und Problemstellung

Beispiel 1.1 Der einfachste Fall einer Differentialgleichung (üblicherweise gar nicht als solche bezeichnet) ist

$$y' = f(x) \qquad \text{(die rechte Seite ist von } y \text{ unabhängig).}$$

Für ein stetiges f bedeutet dies gerade, daß y eine Stammfunktion von f ist; insofern ist dies die einzige „Differentialgleichung“, die wir bereits behandelt haben. Offenbar ist für jedes x_0 aus dem Definitionsbereich von f und jedes $y_0 \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ durch

$$y(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

eine Lösung mit dem ***Anfangswert*** $y(x_0) = y_0$ am Anfangspunkt x_0 gegeben. Diese Lösung ist durch den Anfangswert eindeutig bestimmt, denn für die Differenz zweier Lösungen der Gleichung zum gleichen Anfangswert gilt $w'(x) = 0$ für alle x und $w(x_0) = 0$, also $w \equiv 0$.

Betrachten wir die Lösungen y_{x_0,y_0} zum Anfangswert y_0 beim Anfangspunkt x_0 und y_{x_1,y_1} zum Anfangswert y_1 beim Anfangspunkt x_1, so gilt offenbar

$$\begin{aligned} |y_{x_0,y_0}(x) - y_{x_1,y_1}(x)| &= \left| y_0 - y_1 + \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x_1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \\ &\le |y_0 - y_1| + \left| \int_{x_0}^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}t \right| . \end{aligned}$$

Werden Anfangspunkt und Anfangswert wenig geändert, so ändert sich also die Lösung (global) wenig; sie ***hängt stetig vom Anfangspunkt und vom Anfangswert ab***.

„Lokal“ erhält man sogar eine ***stetige Abhängigkeit von der rechten Seite*** der Gleichung: Für verschiedene rechte Seiten f_0, f_1 gilt nämlich bei Anfangspunkten x_0, x_1 und Anfangswerten y_0, y_1, wenn wir die entsprechenden Lösungen mit $y_0(\cdot)$ bzw. $y_1(\cdot)$ bezeichnen:

$$|y_0(x) - y_1(x)| \le |y_0 - y_1| + \left| \int_{x_0}^{x_1} |f_0(t)|\,\mathrm{d}t \right| + \left| \int_{x_1}^{x} |f_0(t) - f_1(t)|\,\mathrm{d}t \right| .$$

(In dieser Abschätzung kann man die Rollen von $\{x_0,\, y_0,\, f_0\}$ und $\{x_1,\, y_1,\, f_1\}$ vertauschen, was u. U. die Abschätzung verbessert.) Solche Eigenschaften gelten auch für allgemeinere Gleichungen und sind für die Anwendungen von allergrößter Wichtigkeit. #

Beispiel 1.2 ***Eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung*** (z. B. der freie Fall) wird beschrieben durch die Differentialgleichung

$$x'' = b \qquad \text{(in der Physik üblicherweise : } \quad \ddot{x} = b \text{)}$$

wobei b die (konstante) Beschleunigung ist (z. B. die Erdbeschleunigung $b = g \sim -9,81\frac{m}{sec^2}$).
Mit $x_1 = x,\ x_2 = x'$ geht diese Gleichung über in das ***System***

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \qquad (\,x_1(t) &&= \text{Ort zur Zeit } t\,), \\ x_2' &= b \qquad (\,x_2(t) &&= \text{Geschwindigkeit zur Zeit } t\,)\,. \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt (vgl. Beispiel **??**) $x_2(t) = v_0 + bt$, wobei v_0 die Geschwindigkeit zur Zeit 0 ist (Anfangsgeschwindigkeit). Einsetzen in die erste Gleichung ergibt $x_1' = v_0 + bt$, also (wiederum nach Beispiel **??**)

$$x_1(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} b t^2\,,$$

wobei x_0 der Ort zur Zeit 0 ist.

(Natürlich kann man auch direkt, d. h. ohne Übergang zu einem System, die Gleichung integrieren: Aus $x'' = b$ folgt $x'(t) = v_0 + bt$, und damit $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}bt^2$.)

Man sieht dieser Lösung sofort an, daß für jedes kompakte Intervall $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$ gilt:

> Aus $x_{0,n} \longrightarrow x_0,\ v_{0,n} \longrightarrow v_0,\ b_n \longrightarrow b$ folgt für die entsprechenden Lösungen $x_n(t) \longrightarrow x(t)$ gleichmäßig in $[t_1, t_2]$.

Diese gleichmäßige Konvergenz gilt aber nicht auf ganz $\mathbb{R}$; auch wenn x_0 und x_1, v_0 und v_1 bzw. b_1 und b nahe beisammen liegen, weichen die zugehörigen Lösungen für große $|t|$ u. U. weit voneinander ab. Man sagt, die Differentialgleichung ist **nicht *stabil***. #

Aus den bisherigen Überlegungen lassen sich leicht die Wünsche ablesen, die man an eine Theorie der Differentialgleichungen haben wird. Wir beschränken uns dabei auf Gleichungen erster Ordnung:

Ziele einer Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen

1. ***Überblick*** über alle Lösungen einer Gleichung, — wichtiger ist aber:
2. Für beliebige Anfangswerte
   (α) existiert mindestens eine (***Existenz***),
   (β) existiert höchstens eine (***Eindeutigkeit***; zusammen mit (α) genau eine)
   Lösung.

3. Die Lösung sollte ***stetig vom Anfangswert*** und eventuell auch ***vom Anfangspunkt*** und den in der Gleichung enthaltenen Funktionen (z. B. Koeffizienten) ***abhängen***. — Dies wird i. allg. nur lokal (d. h. in der Nähe von x_0) gelten, während weit von x_0 entfernt die Abweichung sehr groß wird, auch wenn die Anfangswerte nahe beisammen liegen (in jedem Fall sollte die Abweichung klein werden, wenn die Anfangswerte hinreichend nahe zusammen liegen).

4. Für wichtige Typen von Gleichungen möchte man Verfahren zur ***expliziten Bestimmung der Lösungen*** haben, eventuell wenigstens zur näherungsweisen Bestimmung (numerisch).

5. In Fällen, wo eine explizite Lösung nicht möglich oder zu schwierig ist, möchte man wenigstens möglichst gute ***qualitative*** und/oder ***quantitative Aussagen*** über die Lösung haben, z. B. ihr asymptotisches Verhalten für große x–Werte.

1.3 Übungsaufgaben

1. a) Man skizziere die Kurvenschar

$$A = \{y(x) = Ce^x : C \in \mathbb{R}\}.$$

   b) Man bestimme eine Differentialgleichung für die Schar B der Kurven, die in jedem Punkt (x, y) die durch den Punkt verlaufende Kurve der Schar A senkrecht schneidet.

   c) Man skizziere die Schar B.

   d) Man bestimme die Schar B als Gesamtheit der Lösungen der in b) gefundenen Differentialgleichung.

2. Die Differentialgleichung 20(*)y' + f(x)y = g(x) habe die Lösungen $y_1(x) = x^2$ und $y_2(x) = x^{-2}$.

   a) Ist z_1 Lösung der Differentialgleichung $(*)$, so ist z_2 genau dann eine Lösung, wenn $y := z_1 - z_2$ die Gleichung

$$y' + f(x)y = 0$$

   löst.

   b) Man bestimme f und g aus $(*)$.

   c) Man bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung $(*)$.

3. a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung

$$y'' - 2xy' + 2ay = 0$$

ein Polynom vom Grad k $(k \in \mathbb{N}_0)$ als Lösung?

b) Für $k = 3$ bestimme man das Polynom mit höchstem Koeffizienten $= 1$, das diese Gleichung löst.

2 Elementar lösbare Differentialgleichungen

In diesem Kapitel werden für einige Klassen gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung Verfahren zur expliziten Lösung angegeben. Existenz– und Eindeutigkeitsfragen für die entsprechenden Anfangswertprobleme werden dabei in der Regel nebenbei mitbeantwortet.

2.1 Differentialgleichungen mit getrennten Variablen

Eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen hat die Gestalt

$$y' = f(x)g(y)\,.$$

Sie heißt so, weil sie für $g \neq 0$ in der Form $y'/g(y) = f(x)$ geschrieben werden kann; hier stehen die Variablen x und y auf verschiedenen Seiten der Gleichung. (Den Fall $g \equiv 1$ haben wir bereits in Beispiel **??** behandelt.)

Satz 2.1 *Seien $f : I_1 \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : I_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $x_0 \in I_1$, $y_0 \in I_2$, $g(y_0) \neq 0$. Dann gibt es eine Umgebung von x_0, in der das* ***Anfangswertproblem***

$$\textbf{AWP} \qquad y' = f(x)g(y), \quad y(x_0) = y_0$$

genau eine Lösung besitzt. Wählen wir Stammfunktionen

$$G \quad \text{von} \quad \frac{1}{g} \qquad \text{und} \qquad F \quad \text{von} \quad f \qquad \text{mit} \qquad G(y_0) \,=\, F(x_0)$$

so erhalten wir die Lösung durch Auflösen der Gleichung

$$G(y) \,=\, F(x)$$

nach y. Diese Auflösung ist stets möglich. (Das entsprechende gilt auch, wenn f komplexwertig ist, G eine Stammfunktion von $1/g$ im Sinne der Funktionentheorie mit $G(y_0) = 0$; Probleme entstehen dadurch, daß wir bisher nichts über die Invertierbarkeit einer solchen Funktion G in $\mathbb{C}$ wissen.)

Beweis. ***Existenz***: Wegen $g(y_0) \neq 0$ ist $g(y) \neq 0$ für y nahe y_0, d. h. G ist streng monoton nahe y_0 und somit ist G dort umkehrbar. Wegen $F(x_0) = G(y_0)$ existiert also eine Funktion $y(\cdot)$, die auf einer Umgebung von x_0 definiert ist mit

$$y(x) = G^{-1}(F(x)) \quad \text{und} \quad y(x_0) = y_0 .$$

Nach der Kettenregel und der Formel für die Ableitung einer Umkehrfunktion gilt also

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G^{-1}(F(x)) = \frac{1}{G'\Big(G^{-1}(F(x))\Big)} F'(x) = \frac{1}{G'(y(x))} F'(x) \\ &= g(y(x))f(x) , \end{aligned}$$

d. h. $y(\cdot)$ ist Lösung des Anfangswertproblems.

Eindeutigkeit: Sei z irgendeine Lösung des AWP. Wegen $g(z(x_0)) = g(y_0) \neq 0$ ist dann $g(z(x)) \neq 0$ für x nahe x_0, also auf Grund der Differentialgleichung

$$\frac{z'(x)}{g(z(x))} = f(x) \quad \text{für} \quad x \quad \text{nahe} \quad x_0.$$

Integration von x_0 bis x liefert (mit Hilfe der Substitution $s = z(t)$)

$$\begin{aligned} F(x) &= F(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; G(y_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{z'(t)}{g(z(t))}\,\mathrm{d}t \;=\; G(y_0) + \int_{y_0}^{z(x)} \frac{1}{g(s)}\,\mathrm{d}s \\ &= G(z(x)) \end{aligned}$$

d. h. z ist die Lösung der Gleichung $F(x) = G(z)$, also $z(x) = G^{-1}(F(x)) = y(x)$. □

Explizit führt man die Lösung einer Gleichung mit getrennten Variablen meist am bequemsten wie folgt durch:

(i) Man bestimmt eine Stammfunktion G von $1/g$,

(ii) man bestimmt eine Stammfunktion F von f,

(iii) man löst $G(y) = F(x) + C$ nach y auf; das liefert (u.U. für jedes C mehrere) Lösungen y_C,

(iv) man bestimmt C so, daß der vorgeschriebene Anfangswert angenommen wird (ein solches C gibt es immer; man braucht nämlich nur mit den in (i) und (ii) gefundenen F und G zu wählen $C = G(y_0) - F(x_0)$.)

Beispiel 2.2 Die Differentialgleichung $y' = xy^2$ hat zunächst die triviale Lösung $y(x) \equiv 0$. — Im Sinne der obigen Überlegungen ist hier $f(x) = x$, $g(y) = y^2$ (also insbesondere $g(y_0) \neq 0$ für alle $y_0 \neq 0$). Stammfunktionen von f und $1/g$ sind

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2, \qquad G(y) = -\frac{1}{y}.$$

Aus $G(y) = F(x) + C$ folgt also durch Auflösen nach y

$$y(x) = -(\frac{1}{2}x^2 + C)^{-1}.$$

Der Anfangswert $y(x_0) = y_0 \neq 0$ liefert schließlich C:

$$y_0 = -(\frac{1}{2}\,x_0^2 + C)^{-1} \implies C = -\frac{1}{y_0} - \frac{1}{2}\,x_0^2.$$

Diese Lösung hat bei x mit $x^2 = -2C$ eine Singularität, d. h. sie ist nicht über $x = \pm(-2C)^{1/2}$ hinaus fortsetzbar. Keine dieser Lösungen mündet allerdings in die bereits oben erwähnte Null–Lösung ein. #

Im ***Spezialfall*** $f(x) \equiv 1$ erhalten wir die Gleichung

$$y' = g(y) \qquad (\textbf{\textit{autonome Differentialgleichung}}).$$

Mit $F(x) := x - x_0$ und $G(y) := \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(s)}\,\mathrm{d}s$ wird dann

$$y(x) = G^{-1}(x - x_0).$$

Wenn G irgendwie Stammfunktion von $1/g$ ist, kann die Lösung angegeben werden in der Form

$$y(x) = G^{-1}(x + C) \quad \text{wobei } C \text{ so zu wählen ist, daß } y(x_0) = y_0 \text{ gilt.}$$

Beispiel 2.3 Eine sehr spezielle *lineare Differentialgleichung* erster Ordnung ist

$$y' = -ay\,.$$

Mit

$$G(y) = -\int_{y_0}^{y} \frac{1}{as}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{a}(\ln|y_0| - \ln|y|)$$

(wenn y_0 und y gleiches Vorzeichen haben) folgt, was man natürlich auch hätte erraten können,

$$\begin{aligned} y(x) &= \pm\exp\Big\{-a(x-x_0) + \ln|y_0|\Big\} \qquad \text{für} \quad y_0 \gtrless 0, \\ &= y_0\exp\Big\{-a(x-x_0)\Big\} \qquad \text{für} \quad y_0 \neq 0\,, \\ y(x) &\equiv 0 \qquad \text{für} \quad y_0 = 0\,. \end{aligned}$$

#

Beispiel 2.4 Wir betrachten die Gleichung

$$y' = |y|^{1/2}\,.$$

Für $y_0 > 0$ und $y > 0$ gilt

$$G(y) = \int_{y_0}^{y} s^{-1/2}\,\mathrm{d}s = 2\left(y^{1/2} - y_0^{1/2}\right)$$

und somit

$$\begin{aligned} y(x) &= \left\{\frac{1}{2}(x-x_0) + y_0^{1/2}\right\}^2 = \frac{1}{4}\left(x - x_0 + 2y_0^{1/2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}(x-c)^2 \qquad \text{mit} \qquad c := x_0 - 2y_0^{1/2}. \end{aligned}$$

Wegen $y' = y^{1/2} > 0$ ist dies nur für $x > c$ eine Lösung der Differentialgleichung.

Entsprechend erhält man für $y_0 < 0$ und $y < 0$

$$y(x) = -\frac{1}{4}(x-d)^2 \qquad \text{für} \qquad x < d := x_0 + 2(-y_0)^{1/2}.$$

Außerdem ist natürlich

$$y(x) = 0 \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}$$

eine Lösung. Die Gesamtheit aller Lösungen ist somit:

(i) $\quad y(x) = 0 \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R},$

(ii) $\quad y(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \le c, \\ \frac{1}{4}(x-c)^2 & \text{für} \quad x \ge c, \end{cases}$

(iii) $\quad y(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(x-d)^2 & \text{für} \quad x \le d, \\ 0 & \text{für} \quad x \ge d, \end{cases}$

(iv) $\quad y(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(x-d)^2 & \text{für} \quad x \le d, \\ 0 & \text{für} \quad d \le x \le c, \\ \frac{1}{4}(x-c)^2 & \text{für} \quad x \ge c. \end{cases}$

Läßt man $d = -\infty$ und $c = +\infty$ zu, so sind allein in (iv) alle Lösungen enthalten. #

Beispiel 2.5 Ganz ähnliche Verhältnisse treten auf bei der Differentialgleichung

$$y' = 2\,\mathrm{sign}(y)\,|y|^{1/2}.$$

Für $y > 0$ lautet die Gleichung $y' = 2y^{1/2}$ mit der Lösung $y(x) = (x-c)^2$; da auf Grund der Differentialgleichung $y' \ge 0$ gelten muß, ist dies jedoch nur für $x \ge c$ eine Lösung.

Entsprechend erhält man für $y < 0$ die Lösung $y(x) = -(x-d)^2$ im Bereich $x \ge d$.

Schließlich ist natürlich $y(x) \equiv 0$ eine Lösung, womit man insgesamt die folgenden Lösungen erhält:

(i) $y(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$,

(ii) $y(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq c\,, \\ (x-c)^2 & \text{für } x \geq c\,, \end{cases}$

(iii) $y(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq d\,, \\ -(x-d)^2 & \text{für } x \geq d\,. \end{cases}$

Für $c \longrightarrow \infty$ bzw. $d \longrightarrow \infty$ erhält man die Lösung (i) aus (ii) bzw. (iii). #

Für $y_0 = 0$ ist in beiden Beispielen die obige Voraussetzung $g(y) \neq 0$ nicht erfüllt. Tatsächlich geht dadurch in diesen Beispielen die Eindeutigkeit verloren, während dies in Beispiel **??** (trotz $g(0) = 0$) nicht der Fall war. Der folgende Satz macht deutlich, wann trotz $g(y_0) = 0$ der Anfangswert y_0 zu einer lokal eindeutigen Lösung führt.

Satz 2.6 *In der Differentialgleichung* $y' = f(x)g(y)$ *sei* $g(y_0) = 0$ *und* $g(y) \neq 0$ *für* y *nahe* y_0 $(y \neq y_0)$. *Sind die uneigentlichen Integrale*

$$\int_{y_0}^{y_0+\delta} \frac{1}{g(s)}\,\mathrm{d}s \qquad \textit{und} \qquad \int_{y_0-\delta}^{y_0} \frac{1}{g(s)}\,\mathrm{d}s$$

divergent für geeignetes $\delta > 0$, *so ist* $y(x) \equiv y_0$ *die einzige Lösung des Anfangswertproblems*

$$y' = f(x)g(y), \qquad y(x_0) = y_0\,.$$

Mit anderen Worten: es gibt keine andere Lösung, die (wie in obigem Beispiel) in diese Lösung einmündet.

Beweis. Nehmen wir an, daß das AWP eine Lösung $y(x) \not\equiv y_0$ besitzt. Ist $y(x) \not\equiv y_0$ rechts von x_0, so gibt es x_1 und x_2 mit

$$y_0 = y(x_1) \neq y(x) \quad \text{und} \quad g(y(x)) \neq 0 \quad \text{für} \quad x_0 \leq x_1 < x < x_2\,.$$

Dann gilt

$$\int_{y(x_1+\eta)}^{y(x)} \frac{1}{g(s)}\,\mathrm{d}s = \int_{x_1+\eta}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (\text{Substitution } s = y(t)).$$

Für $\eta \longrightarrow 0+$ divergiert nach Voraussetzung die linke Seite, während die rechte offensichtlich konvergiert. Das ist ein Widerspruch. Entsprechend verfährt man, wenn $y(x) \not\equiv y_0$ links von x_0 gilt. $\square$

2.2 Differentialgleichungen der Form $y' = f(ax + by + c)$

Im Fall $b = 0$ ist die Gleichung trivial; sei also o. E. $b \neq 0$. Für die neue Funktion

$$u(x) := ax + by(x) + c$$

erhält man eine (autonome) Differentialgleichung mit getrennten Variablen

$$\begin{aligned} u' &= a + by' = a + bf(ax + by(x) + c) \\ &= a + bf(u)\,. \end{aligned}$$

Ist u Lösung dieser Gleichung, so ist

$$y(x) = \frac{1}{b}(u(x) - ax - c)$$

Lösung der ursprünglichen Gleichung, denn es gilt

$$y' = \frac{1}{b}(u' - a) = \frac{1}{b}(a + bf(u) - a) = f(u) = f(ax + by + c)\,.$$

Offensichtlich kann jede Lösung auf diese Weise gewonnen werden.

Beispiel 2.7 $\quad y' = (x + y)^2 \quad$ (also $a = 1$, $b = 1 \neq 0$ und $c = 0$).
Die Differentialgleichung für $u = x+y$ lautet $u' = 1+u^2$ und hat die Lösung $u = \tan(x+C)$ (denn es ist $G(u) = \arctan u$); hier ist C so zu wählen, daß für $y(x) = u(x) - x$ die Anfangsbedingung erfüllt ist. #

2.3 Die homogene Differentialgleichung $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Mit $u(x) := \dfrac{y(x)}{x}$ erhält man

$$u' = \frac{y'x - y}{x^2} = x^{-1}\left(y' - \frac{y}{x}\right) = x^{-1}(f(u) - u)\,,$$

also eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen. Ist u Lösung dieser Gleichung, so löst

$$y(x) := xu(x)$$

die ursprüngliche Gleichung. Andererseits kann jede Lösung so gewonnen werden (die Division durch 0 für $x = 0$ stört nicht, da laut Differentialgleichung für $x = 0$ auch y verschwinden muß).

Beispiel 2.8 $y' = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x^2}{y^2}\,, \quad y(1) = 1\,.$ Hier ist also $f(t) = t - t^{-2}$ und die Differentialgleichung für u lautet

$$u' = \frac{1}{x}(u - u^{-2} - u) = -(xu^2)^{-1}, \qquad u(1) = 1\,.$$

Mit $f(x) = -\dfrac{1}{x}$ und $g(u) = u^{-2}$ (im Sinne von Abschnitt 2.1) erhalten wir also

$$\begin{aligned} F(x) &= -\ln x, \qquad G(u) \;=\; \frac{1}{3}u^3\,, \\ u &= G^{-1}(F(x) + C) \;=\; \{-3\ln x + 3C\}^{1/3}\,. \end{aligned}$$

Mit der Anfangsbedingung $u(1) = 1$ folgt $C = 1/3$, also

$$y(x) \;=\; xu(x) \;=\; x\{1 - 3\ln x\}^{1/3}\,.$$ #

2.4 Differentialgleichungen der Form $y' = f\left(\dfrac{ax + by + a}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right)$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

(a) $\operatorname{Det}\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = 0$, z. B. $(a,\, b) = \lambda(\alpha,\, \beta)$. Die Differentialgleichung hat also die Form

$$y' \;=\; f\left(\frac{\lambda(\alpha x + \beta y) + c}{(\alpha x + \beta y) + \gamma}\right) \;=\; g(\alpha x + \beta y)$$

mit $g(s) := f\left(\dfrac{\lambda s + c}{s + \gamma}\right)$. Dies ist eine Gleichung des Typs wie sie in Abschnitt 2.2 behandelt wurde.

(b) $\operatorname{Det}\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \neq 0$. Dann hat das Gleichungssystem

$$ax + by + c = 0$$

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

eine eindeutig bestimmte Lösung (ξ, η). Für die neuen Variablen

$$\overline{x} := x - \xi\,, \quad \overline{y} := y - \eta$$

gilt dann

$$\begin{aligned}
\overline{y}(\overline{x}) &= y(x) - \eta \;=\; y(\overline{x}+\xi) - \eta\,, \\
\overline{y}'(\overline{x}) &= y'(\overline{x}+\xi) \;=\; f\left(\frac{a(\overline{x}+\xi) \;+\; by(\overline{x}+\xi) \;+\; c}{\alpha(\overline{x}+\xi) \;+\; \beta y(\overline{x}+\xi) \;+\; \gamma}\right) \\
&= f\left(\frac{a(\overline{x}+\xi) \;+\; b(\overline{y}(\overline{x})+\eta) \;+\; c}{\alpha(\overline{x}+\xi) \;+\; \beta(\overline{y}(\overline{x})+\eta) \;+\; \gamma}\right) \\
&\qquad (\text{ nach Konstruktion von } \;(\xi, \eta)\,) \\
&= f\left(\frac{a\overline{x} + b\overline{y}(\overline{x})}{\alpha\overline{x} + \beta\overline{y}(\overline{x})}\right) \;=\; f\left(\frac{a + b\,\overline{y}/\overline{x}}{\alpha + \beta\,\overline{y}/\overline{x}}\right) \\
&= g\left(\frac{\overline{y}}{\overline{x}}\right) \qquad \text{mit} \qquad g(s) \;:=\; f\left(\frac{a+bs}{\alpha+\beta s}\right)\,.
\end{aligned}$$

Somit ist die Lösung dieser Differentialgleichung auf die Lösung einer homogenen Differentialgleichung zurückgeführt. Die Lösung der ursprünglichen Gleichung ist

$$y(x) \;=\; \overline{y}(\overline{x}) + \eta \;=\; \overline{y}(x-\xi) + \eta\,.$$

2.5 Die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

Allgemein heißt eine Differentialgleichung $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ ***linear***, wenn F eine affine Funktion von $y, y', \ldots, y^{(n)}$ ist, d. h.

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = g(x) + \sum_{j=0}^{n} f_j(x) y^{(j)}\,.$$

Speziell hat also die ***explizite lineare Differentialgleichung erster Ordnung*** die Form

$$y' + f(x)y \;=\; g(x)\,.$$

Die Gleichung heißt

homogen, falls $g \equiv 0$ gilt : $\quad y' + f(x)y = 0\,,$

inhomogen, falls $g \not\equiv 0$ gilt : $\quad y' + f(x)y = g(x)\,.$

$g(\cdot)$ heißt die ***rechte Seite*** der Differentialgleichung.

Die ***homogene Gleichung*** $y' = -f(x)y$ ist eine Gleichung mit getrennten Variablen, die wir sofort lösen können:

$$\begin{aligned} g(y) &= -y, \qquad F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad G(y) = -\ln|y|\,, \\ y(x) &= \pm\exp\Big\{-\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t + C\Big\}\,. \end{aligned}$$

Die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ liefert also

$$y(x) = y_0 \exp\Big\{-\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\Big\}\,.$$

Die Lösung existiert auf dem gesamten Intervall, auf dem f (stetig) definiert ist.

Die ***inhomogene Gleichung*** wird mit einem (auch für Systeme und damit für lineare Gleichungen höherer Ordnung, vgl. Abschnitt 4.3 und 6.1) wichtigen ***Trick*** gelöst: In Anlehnung an die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $C\exp\Big\{-\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\Big\} =: C\tilde{y}(x)$ setzt man für die Lösung der inhomogenen Gleichung an

$$y(x) = C(x)\exp\Big\{-\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\Big\} =: C(x)\tilde{y}(x)\,;$$

man ersetzt also die Konstante C durch eine Funktion: ***Variation der Konstanten***. (Da $\tilde{y}(x) \neq 0$ für alle x gilt, läßt sich $y(\cdot)$ jedenfalls so schreiben; die Frage ist nur, ob man $C(x)$ auch berechnen kann. Wenn überhaupt eine stetig differenzierbare Lösung $y(\cdot)$ existiert, ist jedenfalls $C(\cdot) = y(\cdot)/\tilde{y}(\cdot)$ stetig differenzierbar) — Einsetzen in die (inhomogene) Gleichung liefert

$$C'(x)\tilde{y}(x) + C(x)\tilde{y}'(x) + C(x)f(x)\tilde{y}(x) = g(x)\,.$$

Wegen $\tilde{y}' + f(x)\tilde{y} = 0$ heben sich die Terme 2 und 3 heraus. Es bleibt

$$C'(x)\tilde{y}(x) = g(x), \quad C'(x) = \frac{g(x)}{\tilde{y}(x)} = g(x)\exp\Big\{\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\Big\}$$

und somit

$$C(x) = \int_{x_0}^{x} g(s) \exp\Big\{ \int_{x_0}^{s} f(t)\,\mathrm{d}t \Big\}\,\mathrm{d}s + C_0 \qquad \text{mit} \qquad C_0 = y_0\,.$$

Satz 2.9 *Sei* $f: I \longrightarrow \mathbb{C}$ *stetig. Das Anfangswertproblem*

$$AWP \qquad y' + f(x)y = g(x), \qquad y(x_0) = y_0$$

hat die auf ganz I *definierte eindeutig bestimmte Lösung*

$$y(x) = \exp\Big\{ -\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \Big\} \Big[y_0 + \int_{x_0}^{x} g(s) \exp\Big\{ \int_{x_0}^{s} f(t)\,\mathrm{d}t \Big\}\,\mathrm{d}s \Big]\,.$$

Die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems läßt sich also schreiben als Summe einer ***speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung*** *(hier mit Anfangswert* 0*), und einer* ***Lösung der homogenen Gleichung*** *(die den geforderten Anfangswert annimmt).*

Beweis. Offenbar löst dieses y das Anfangswertproblem. Sind y und z Lösungen, so ist $w := y - z$ Lösung des homogenen Anfangswertproblems

$$w' + f(x)w = 0, \qquad w(x_0) = 0\,.$$

Dann ist aber $w \equiv 0$. Wäre nämlich $w(x_1) \neq 0$, so wäre (vgl. obige Formel für die Lösung der homogenen Gleichung, die durch ihren Anfangswert eindeutig besimmt ist) $w(x) \neq 0$ für alle x; das ist ein Widerspruch zu $w(x_0) = 0$. □

2.6 Die exakte Differentialgleichung

Eine Differentialgleichung

$$y'\,h(x,y) + g(x,y) = 0 \qquad \text{mit} \qquad h, g : D \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ D \subset \mathbb{R}^2$$

heißt ***exakt***, wenn eine stetig differenzierbare Funktion $F: D \longrightarrow \mathbb{R}$, existiert mit

$$h(x,y) = F_y(x,y), \quad g(x,y) = F_x(x,y)\,.$$

Ein solches F heißt eine ***Stammfunktion*** der Gleichung. Die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x,y(x)) &= D_1F(x,y(x)) + D_2F(x,y(x))y'(x) \\ &= g(x,y(x)) + h(x,y(x))y'(x) \;=\; 0\,,\end{aligned}$$

d. h. auf einer Lösungskurve der Differentialgleichung ist F konstant; die Lösungskurven sind die Niveaulinien von F.

So sind z. B. die Kreise mit Mittelpunkt 0

$$y_c(x) = \pm\sqrt{c^2 - x^2}$$

die Niveaulinien von $F(x,y) = x^2 + y^2$, also die Lösungen der Differentialgleichung

$$2y'y + 2x = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad y'y + x = 0\,.$$

Satz 2.10 *Seien $h, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ $(D \subset \mathbb{R}^2)$ stetig mit $h(x,y) \neq 0$. Ist die Differentialgleichung*

$$y'h(x,y) + g(x,y) = 0 \qquad \textbf{\textit{exakt}} \textit{ mit Stammfunktion } \quad F \in C^1(D)\,,$$

so erhält man durch Auflösen der Gleichungen $F(x,y) = C$ alle Lösungen der Differentialgleichung. (Die Bedingung $h = D_2F \neq 0$ garantiert, daß die Gleichungen $f(x,y) = C$ tatsächlich nach y auflösbar sind: Für jedes x gibt es nur ein y mit $F(x,y) = C$.)

Wie stellt man nun fest, ob die Differentialgleichung exakt ist?

Satz 2.11 *Ist $D \subset \mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend und sind $g, h : D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so ist die Differentialgleichung $y'h(x,y) + g(x,y) = 0$ genau dann exakt, wenn gilt*

$$g_y(x,y) \;=\; h_x(x,y) \qquad \textit{für alle} \quad (x,y) \in D\,.$$

(Falls D nicht einfach zusammenhängend ist, gilt diese Aussage in jeder einfach zusammenhängenden Teilmenge von D, also jedenfalls lokal; da aber auch die Lösungen der Differentialgleichung i. allg. nur lokal existieren, stört dies nicht weiter.)

Beweis. Mit dem Vektorfeld $k(x,y) = (g(x,y), h(x,y))$ und einem beliebigen $(x_0, y_0) \in D$ definieren wir (als Kurvenintegral über eine beliebige Kurve von (x_0, y_0) nach (x,y)

$$F(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} k_1(s,t)\,\mathrm{d}s + k_2(s,t)\,\mathrm{d}t = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} g(s,t)\,\mathrm{d}s + h(s,t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Wegen $\operatorname{rot} k = h_x - g_y = 0$ ist das Kurvenintegral wegunabhängig (Satz von Stokes); es ist deshalb gleichgültig, welcher Weg von (x_0, y_0) nach (x,y) gewählt wird. Weiter gilt für dieses F offenbar $F_x = g$, $F_y = h$. □

Beispiel 2.12 In der Differentialgleichung

$$xe^{xy}y' + 2x + ye^{xy} = 0$$

haben wir

$$\begin{aligned} h(x,y) &= xe^{xy}\,, & h_x(x,y) &= e^{xy} + xye^{xy}\,, \\ g(x,y) &= 2x + ye^{xy}\,, & g_y(x,y) &= e^{xy} + xye^{xy}\,, \end{aligned}$$

d. h. die Differentialgleichung ist exakt. Für F erhalten wir mit obigem Satz ((x_0, y_0) beliebig)

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} g(s,t)\,\mathrm{d}s + h(s,t)\,\mathrm{d}t = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (2s + te^{st})\,\mathrm{d}s + se^{st}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)} (2s + te^{st})\,\mathrm{d}s + \int_{(x,y_0)}^{(x,y)} se^{st}\,\mathrm{d}t = (s^2 + e^{st})\Big|_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)} + e^{st}\Big|_{(x,y_0)}^{(x,y)} \\ &= x^2 + e^{xy_0} - x_0^2 - e^{x_0y_0} + e^{xy} - e^{xy_0} \\ &= x^2 + e^{xy} - (x_0^2 + e^{x_0y_0}) = x^2 + e^{xy} - C\,. \end{aligned}$$

Mit etwas Phantasie hätte man F natürlich auch erraten können. Damit erhalten wir nun die Lösungen

$$y = \frac{1}{x}\ln|x^2 - C|\,. \qquad \#$$

Es ist natürlich ein seltener Zufall, wenn eine Differentialgleichung exakt ist. Unter Umständen kann sie durch Multiplikation mit einer Funktion $M(x,y) \neq 0$ exakt gemacht werden; eine solche Funktion wird als ***integrierender Faktor*** oder ***Eulerscher Multiplikator*** bezeichnet. Die Menge der Lösungen wird durch eine solche Multiplikation natürlich nicht verändert.

Beispiel 2.13 Die Gleichung

$$2y'x + y = 0 \qquad (h = 2x,\ g = y,\ h_x = 2,\ g_y = 1)$$

ist nicht exakt. Durch Multiplikation mit $x^{-1/2}$ wird sie exakt:

$$2y'x^{1/2} + yx^{-1/2} = 0, \qquad h = 2x^{1/2}, \qquad g = yx^{-1/2}, \qquad F(x,y) = 2y\sqrt{x}\,.$$

Ebenso könnte man mit y multiplizieren

$$2y'xy + y^2 = 0, \qquad h = 2xy, \quad g = y^2, \qquad F(x,y) = xy^2\,.$$

(In beiden Fällen kann man die Stammfunktion leicht erraten; wenn dies nicht gelingt, muß man wie im obigen Beispiel vorgehen.) Die Lösungen der Differentialgleichung sind also

$$y \;=\; Cx^{1/2}\,.$$ #

Nach obigem Satz über die Exaktheit einer Differentialgleichung ist offenbar M genau dann ein integrierender Faktor, wenn gilt: $(Mg)_y = (Mh)_x$, d. h.

$$M_y g + M g_y \;=\; M_x h + M h_x\,.$$

In dieser Form ist das Verfahren schwer anwendbar. Häufig gelingt es aber, einen integrierenden Faktor zu finden, der nur von x oder nur von y abhängt:

(i) $M(x)$ ist genau dann ein integrierender Faktor, wenn gilt

$$\frac{M'(x)}{M(x)} \;=\; \frac{g_y(x,y) - h_x(x,y)}{h(x,y)}\,.$$

Ein solcher existiert, wenn hier die rechte Seite nur von x abhängt.

(ii) $M(y)$ ist genau dann ein integrierender Faktor, wenn gilt

$$\frac{M'(y)}{M(y)} = \frac{h_x(x,y) - g_y(x,y)}{g(x,y)} .$$

Ein solcher existiert, wenn hier die rechte Seite nur von y abhängt.

Hiermit sieht man z. B., daß es in Beispiel **??** und Beispiel **??** integrierende Faktoren gibt, die nur von x oder y abhängen.

Beispiel 2.14 Die Differentialgleichung

$$xyy' + \frac{1}{2}(xy^2 + y^2) = 0$$

ist nicht exakt:

$$h(x,y) = xy, \quad h_x = y, \quad g(x,y) = \frac{1}{2}(xy^2 + y^2), \quad g_y = (x+1)y .$$

Es gilt aber

$$\frac{1}{h}(g_y - h_x) = 1 \qquad \text{(hängt also nur von } x \text{ ab).}$$

Aus $M'/M = 1$ erhält man also den integrierenden Faktor

$$M = e^x$$

und somit die exakte Differentialgleichung

$$xye^x y' + \frac{1}{2}(x+1)y^2 e^x = 0 .$$

Als Stammfunktion erhält man (erraten oder berechnen wie in Beispiel **??**)

$$F(x,y) = \frac{1}{2} y^2 x e^x ,$$

und somit die Lösungen

$$y = C\Big\{2\frac{1}{x}e^{-x}\Big\}^{1/2} = C' x^{-1/2} e^{-x/2} .$$

#

2.7 Übungsaufgaben

1. Man bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = -3|y|^{2/3}$$

und bestimme die Menge der Anfangsdaten, für die das AWP **nicht** lokal eindeutig lösbar ist.

2. a) Man beschreibe ein Verfahren zur Lösung der Differentialgleichung

$$y'' = f(y),$$

indem man die mit y' multiplizierte Gleichung integriert.

b) Auf diese Weise löse man die Differentialgleichung

$$y'' = -y.$$

3. a) Man löse das Anfangswertproblem

$$(1 + e^x)yy' = e^x, \qquad y(1) = 1.$$

b) Man bestimme alle Lösungen von

$$y' = (x - y)^2 + 1.$$

4. Man bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$xy' - y(1 + xy) = 0.$$

Anleitung: Es gibt einen integrierenden Faktor, der nur von y abhängt.

5. Sei $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = b$, $a \in (0, \infty)$. Man zeige mit Hilfe der Lösungsformel aus der Vorlesung, daß für jede Lösung der Differentialgleichung $y' + ay = g(x)$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \frac{b}{a}.$$

6. Man bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung.

$$y' = \frac{x - y}{x + 2y}.$$

Anleitung: Umschreiben als homogene Differentialgleichung.

7. a) Man zeige: Die Tangenten der Lösungskurven einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung in den Punkten mit gleicher Abszisse schneiden sich in einem Punkt.
   b) Die Gesamtheit dieser Schnittpunkte bildet eine Kurve, die ***Leitkurve***. Man gebe die Leitkurve in Parameterdarstellung.
   c) Man bestimme die Leitkurve der Differentialgleichung $y' - e^{-x}y = 1 - xe^{-x}$ in kartesischen Koordinaten.
8. Man löse die Differentialgleichung

$$xy' + y = y^2 \ln x \qquad \text{für} \quad x > 0$$

mit Hilfe der Substitution $z = xy$.

9. Ein Punkt P_1 bewege sich auf der x_1–Achse der (x_1, x_2)–Ebene mit Geschwindigkeit 1 in positiver Richtung. Ein weiterer Punkt P_2 bewege sich so, daß
   (i) der Abstand der Punkte P_1 und P_2 konstant gleich 1 ist,
   (ii) der Punkt P_2 sich immer in Richtung P_1 bewegt.

Man stelle ein Differentialgleichungssystem

$$x_j' = f_j(t, x_1, x_2)\,,\; j = 1, 2$$

für die Bewegung von P_2 auf.

Anleitung: Jede der Bedingungen (i) und (ii) liefert eine Gleichung; aus diesen beiden Gleichungen gewinnt man das System.

Ergebnis: $x_1' = (x_1 - t)^2\,, \quad x_2' = x_2(x_1 - t)\,.$

10. Man löse das System aus Aufgabe **??**.

Hilfen :

$$\frac{d}{dx}\tanh x = 1 - (\tanh x)^2$$

$$\frac{d}{dx}\ln\cosh x = \tanh x\,.$$

11. a) Man bestimme die Lösungsmatrix von

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} y \qquad \text{für} \quad x_0 = 0\,.$$

b) Man löse das Anfangswertproblem

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} x-1 \\ 2x \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hilfe: $\begin{pmatrix} -x \\ 0 \end{pmatrix}$ ist eine Lösung des inhomogenen Systems.

3 Existenz, Eindeutigkeit und stetige Abhängigkeit

In zahlreichen konkreten Fällen haben wir gesehen, daß das Anfangswertproblem

$$\text{AWP}: \quad y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

(zumindest in einer Umgebung von x_0, d. h. lokal) genau eine Lösung besitzt. Wir haben aber auch gesehen, daß diese Lösung in manchen Fällen nicht eindeutig besimmt ist. Welche Voraussetzungen an das AWP sind nun eigentlich ausreichend, um die Existenz und die Eindeutigkeit zu garantieren?

3.1 Die Lipschitzbedingung

Wir betrachten also Anfangswertprobleme der obigen Form mit

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad (\text{bzw. } \mathbb{C}^m), \qquad G \subset \mathbb{R}^{m+1} \quad (\text{bzw. } \mathbb{R} \times \mathbb{C}^m) \quad \text{offen}$$

(im folgenden legen wir o. E. in der Regel den allgemeineren Fall komplexwertiger Funktionen y bzw. y_j zu Grunde). Ausführlich geschrieben handelt es sich also um das System

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= f_1(x, y_1(x), \ldots, y_m(x)), \\ &\vdots \\ y_m'(x) &= f_m(x, y_1(x), \ldots, y_m(x)). \end{aligned}$$

Man sagt f erfüllt (bezüglich y) eine (globale) ***Lipschitzbedingung*** mit ***Lipschitzkonstante*** L, wenn gilt

$$|f(x,y) - f(x,\tilde{y})| \leq L|y - \tilde{y}| \qquad \text{für} \quad (x,y), (x,\tilde{y}) \in G;$$

f erfüllt ***lokal*** eine ***Lipschitzbedingung*** (bezüglich y), wenn es zu jedem Punkt $(x_0, y_0) \in G$ eine Umgebung U gibt so, daß $f|_{G\cap U}$ eine Lipschitzbedingung mit einer Lipschitzkonstanten $L(U)$ erfüllt.

Beispiel 3.1 a) $f: \mathbb{R}\times\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(x,y) = xy^2$ genügt lokal einer Lipschitzbedingung:

$$|f(x,y) - f(x,\tilde{y})| = |x(y+\tilde{y})(y-\tilde{y})| \leq |x(y+\tilde{y})|\,|y-\tilde{y}|.$$

Die Funktion genügt aber keiner globalen Lipschitzbedingung: für $y = \tilde{y} + 1$ und $x \neq 0$ gilt nämlich $|f(x,y) - f(x,\tilde{y})| = |x|\,|2y+1| = L|y - \tilde{y}|$ mit $L \longrightarrow \infty$ für $y \longrightarrow \infty$.

b) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(x,y) = |y|^{1/2}$ genügt (bei 0) keiner Lipschitzbedingung. #

Für den Nachweis der Gültigkeit einer Lipschitzbedingung ist folgender Satz sehr nützlich.

Satz 3.2 *Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^m$ offen, $f : G \longrightarrow \mathbb{C}^m$ bezüglich y stetig partiell differenzierbar (d. h. f und $D_y f$ sind stetig in G). Dann gilt:*

a) *f genügt lokal einer Lipschitzbedingung.*

b) *Ist G konvex und sind die partiellen Ableitungen von f nach y in G beschränkt, so genügt f einer Lipschitzbedingung.*

Beweis. a) Sei $(x_0, y_0) \in G$. Dann existiert ein $r > 0$ so, daß

$$U := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^m : |x - x_0| \le r,\ |y - y_0| \le r\Big\} \subset G$$

gilt, und in U alle partiellen Ableitungen von f nach y beschränkt sind. Nach dem m–dimensionalem Mittelwertsatz gilt dann

$$|f(x,y) - f(x,\tilde{y})| \ \le \ L|y - \tilde{y}| \qquad \text{für} \quad (x,y), (x,\tilde{y}) \in U$$

mit

$$L \ = \ \sup\Big\{|D_y f(x,y)| : (x,y) \in U\Big\},$$

wobei mit $|\mathrm{D}_y f(x,y)|$ die Norm der linearen Abbildung $D_y f(x,y) : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^m$ gemeint ist.

Eine solche Abschätzung läßt sich aber auch elementar, nur mit Hilfe des 1–dimensionalen Mittelwertsatzes, zeigen, denn es gilt

$$\begin{aligned}
|f(x,y) - f(x,\tilde{y})| \ &\le \ \Big|f(x,y) - f(x,\tilde{y}_1, y_2, \ldots, y_m)\Big| \\
&\quad + \Big|f(x,\tilde{y}_1, y_2, \ldots, y_m) - f(x, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, y_3, \ldots, y_m)\Big| \\
&\quad \ \vdots \\
&\quad + \Big|f(x,\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_{m-1}, y_m) - f(x,\tilde{y})\Big| \\
&\le \ \tilde{L}\Big\{|y_1 - \tilde{y}_1| + \ldots + |y_m - \tilde{y}_m|\Big\} \ = \ \tilde{L}\sqrt{m}\,|y - \tilde{y}| \\
&= \ \hat{L}|y - \tilde{y}|
\end{aligned}$$

mit $\tilde{L} := \sup\Big\{|D_{y_j} f(x,y)| \,:\, (x,y) \in U,\, j = 1,\ldots,m\Big\}$.

b) In diesem Fall kann $U = G$ gewählt werden. □

3.2 Existenz und Eindeutigkeit

Satz 3.3 (Eindeutigkeitssatz) *Sei* $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^m$ *offen,* $f : G \longrightarrow \mathbb{C}^m$ *stetig und erfülle lokal eine Lipschitzbedingung bezüglich* y. *Sind* y *und* $z : I \longrightarrow \mathbb{C}^m$ *Lösungen der Differentialgleichung*

$$y' = f(x,y) \quad \textit{mit} \quad y(x_0) = z(x_0) \quad \textit{für ein} \quad x_0 \quad \textit{aus} \quad I\,,$$

so gilt $y(x) = z(x)$ *für alle* $x \in I$. *(Kurz: Eine lokale Lipschitzbedingung impliziert globale Eindeutigkeit.)*

Beweis. Würde die Behauptung nicht gelten, so gäbe es

(i) ein $\tilde{x} > x_0,\ \tilde{x} \in I$ mit $y(\tilde{x}) \neq z(\tilde{x})$, oder

(ii) ein $\tilde{x} < x_0,\ \tilde{x} \in I$ mit $y(\tilde{x}) \neq z(\tilde{x})$.

O. E. nehmen wir an, daß der erste Fall vorliegt. Sei

$$x_1 := \sup\Big\{x \in I : y(s) = z(s) \quad \text{für} \quad x_0 \le s \le x\Big\} < \tilde{x}\,.$$

Da y und z stetig sind, gilt

$$y(x_1) = z(x_1)\,.$$

Sei r so, daß

$$U := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^m : |x - x_1| \le r,\, |y - y(x_1)| \le r\Big\} \subset G$$

gilt und f in U eine Lipschitzbedingung mit Lipschitzkonstante $L = L(U)$ erfüllt. Da y und z stetig sind, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|y(x) - y(x_1)| \le r, \quad |z(x) - y(x_1)| \le r \quad \text{für} \quad |x - x_1| < \delta\,;$$

dabei kann o. E. $\delta \leq r$ gewählt werden. Für $x \in I$ mit $0 \leq x - x_1 < \delta$ gilt also

$$\begin{aligned} |y(x) - z(x)| &= \Big| \int_{x_1}^{x} \Big\{ f(t, y(t)) - f(t, z(t)) \Big\} \, \mathrm{d}t \Big| \\ &\leq \int_{x_1}^{x} L |y(t) - z(t)| \, \mathrm{d}t \,. \end{aligned}$$

Mit

$$M(x) := \sup \Big\{ |y(t) - z(t)| : x_1 \leq t \leq x \Big\} \quad \text{für} \quad x \geq x_1$$

gilt also für $0 \leq s - x_1 \leq x - x_1 \leq \delta$

$$|y(s) - z(s)| \leq L(s - x_1) M(s) \leq L(x - x_1) M(x) \,.$$

Bildet man links das Supremum über alle $s \in (x_1, x)$, so erhält man

$$M(x) \leq L(x - x_1) \, M(x) \,.$$

was für x nahe bei x_1 nur möglich ist, wenn $M(x) = 0$ gilt. Das ist aber im Widerspruch zur Konstruktion von x_1. □

Aus Beispiel **??**, $y' = |y|^{1/2}$, wissen wir bereits, daß die Eindeutigkeit der Lösung eines Anfangswertproblems i. allg. nicht gegeben ist, wenn $f(\cdot\,, \cdot)$ keine Lipschitzbedingung bezüglich y erfüllt. Im folgenden werden wir sehen, daß andererseits die Lipschitzbedingung ausreicht, um lokal auch die Existenz einer Lösung zu garantieren (die dann zwangsläufig eindeutig bestimmt ist).

Satz 3.4 (Existenzsatz von Picard–Lindelöf) a) *Ist* $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^m$ *offen und* $f : G \longrightarrow \mathbb{C}^m$ *stetig und erfüllt lokal eine Lipschitzbedingung bezüglich* y, *so gibt es zu beliebigem* $(x_0, y_0) \in G$ *ein* $\varepsilon > 0$ *so, daß das Anfangswertproblem*

$$AWP \qquad y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

in $[x_0 - \varepsilon,\, x_0 + \varepsilon]$ *lösbar ist.*

b) *Ist $[x_0, \hat{x})$ das größte rechts von x_0 gelegene rechtsoffene Intervall, auf dem die Lösung existiert, und ist K eine kompakte Teilmenge von G, so gibt es ein $\tilde{x} \in (x_0, \hat{x})$ mit $(x, y(x)) \notin K$ für $x > \tilde{x}$, d. h. die Lösung nähert sich für $x \longrightarrow \hat{x}$ dem Rand von G bzw. wird unendlich. (Entsprechendes gilt, wenn $(\hat{x}, x_0]$ das größte links von x_0 liegende linksoffene Intervall ist, auf dem die Lösung existiert.) Die Lösung kann also immer soweit fortgesetzt werden, bis sie an den Rand von G stößt.*

Beweis. a) Da G offen ist, existiert ein $r > 0$ mit

$$U := \Big\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^m : |x - x_0| \le r,\ |y - y_0| \le r\Big\} \subset G\,.$$

In U erfüllt f eine Lipschitzbedingung bezüglich y mit einer Lipschitzkonstanten $L = L(U)$. Da f stetig ist, existiert ein $M \ge 0$ mit

$$|f(x, y)| \le M \qquad \text{für} \quad (x, y) \in U\,.$$

Sei

$$\varepsilon := \min\{r, \frac{r}{M}\}, \qquad I := [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]\,.$$

(Diese Wahl von ε läßt sich leicht begründen: Der Betrag der Ableitung in U ist höchstens M und das Intervall I ist so klein gewählt, daß eine Kurve, die in (x_0, y_0) beginnt und immer maximale Ableitung hat, den Rand von U frühestens in den Randpunkten von I erreicht.)

Eine Funktion $y : I \longrightarrow \mathbb{C}^m$ löst offenbar genau dann das AWP, wenn gilt

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, \mathrm{d}t, \qquad x \in I\,.$$

Der Vorteil dieser „Integralgleichung" gegenüber der Differentialgleichung liegt u. a. darin, daß sie auch die Anfangsbedingung enthält. Zur Lösung dieser Integralgleichung benutzt man das ***Iterationsverfahren von Picard***:

$$\begin{aligned} y_0(x) &= y_0 \qquad \text{für alle} \quad x \in I\,, \\ y_{k+1}(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_k(t))\, \mathrm{d}t \qquad \text{für} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad x \in I\,. \end{aligned}$$

Wir zeigen: Die Folge (y_k) ist für alle $k \in \mathbb{N}$ auf ganz I definiert und konvergiert auf I gleichmäßig gegen eine Lösung der Integralgleichung (und damit des AWP).

(i) Alle y_k sind auf ganz I definiert: dafür genügt es, induktiv zu zeigen:

$$|y_k(x) - y_0| \le r \qquad \text{für alle} \quad x \in I, \ k \in \mathbb{N}_0 .$$

k = 0: Dies ist klar, da $y_0(x) = y_0$ gilt.

k ⟹ k + 1: Sei $|y_k(x) - y_0| \le r$ für alle $x \in I$. Dann folgt aus der Rekursionsformel

$$|y_{k+1}(x) - y_0| \le \Big| \int_{x_0}^{x} f(t, y_k(t)) \, \mathrm{d}t \Big| \le \Big| \int_{x_0}^{x} |f(t, y_k(t))| \, \mathrm{d}t \Big| \le M\varepsilon \le r .$$

(ii) Es gilt: $|y_{k+1}(x) - y_k(x)| \le ML^k \dfrac{|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!}$ für alle $x \in I, \ k \in \mathbb{N}_0$.

k = 0 : $$|y_1(x) - y_0| = \Big| \int_{x_0}^{x} f(t, y_0) \, \mathrm{d}t \Big| \le M|x - x_0| = ML^0 \frac{|x - x_0|^{0+1}}{(0+1)!} .$$

25**k-1** $\Longrightarrow k$:
$$\begin{aligned} |y_{k+1}(x) - y_k(x)| &\le \Big| \int_{x_0}^{x} \Big| f(t, y_k(t)) - f(t, y_{k-1}(t)) \Big| \, \mathrm{d}t \Big| \\ &\le \Big| \int_{x_0}^{x} L |y_k(t) - y_{k-1}(t)| \Big| \le L \, \frac{ML^{k-1}}{k!} \Big| \int_{x_0}^{x} |t - x_0|^k \, \mathrm{d}t \Big| \\ &= ML^k \, \frac{|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!} . \end{aligned}$$

(iii) Gleichmäßige Konvergenz der Folge (y_k) auf I: Aus (ii) folgt

$$|y_{k+1}(x) - y_k(x)| \le ML^k \frac{\varepsilon^{k+1}}{(k+1)!} \qquad \text{für alle} \quad x \in I, \, k \in \mathbb{N}_0 .$$

Also ist die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} |y_{k+1}(x) - y_k(x)| \quad \text{in } I \text{ gleichmäßig konvergent.}$$

Somit existiert im Sinne der gleichmäßigen Konvergenz

$$\begin{aligned} y(x) \quad &:= \quad \lim_{k\to\infty} y_{k+1}(x) = \lim_{k\to\infty} \sum_{\ell=0}^{k} \Big(y_{\ell+1}(x) - y_\ell(x) \Big) + y_0 \\ &= \quad y_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \Big(y_{k+1}(x) - y_k(x) \Big) , \end{aligned}$$

und $y(\cdot)$ ist stetig in I.

(iv) $y(\cdot)$ ist Lösung der Integralgleichung: Wegen

$$\Big| f(x, y(x)) - f(x, y_k(x)) \Big| \; \le \; L \Big| y(x) - y_k(x) \Big|$$

konvergiert $f(x, y_k(x))$ gleichmäßig gegen $f(x, y(x))$ und somit gilt

$$\begin{aligned} y(x) \quad &= \quad \lim_{k\to\infty} y_k(x) \; = \; \lim_{k\to\infty} \Big\{ y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{k-1}(t))\, \mathrm{d}t \Big\} \\ &= \quad y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, \mathrm{d}t \, . \end{aligned}$$

b) Nehmen wir an, daß die Behauptung nicht gilt. Dann existiert ein Kompaktum $K \subset G$ und eine Folge $x_n \in [x_0, \hat{x})$ mit $x_n \longrightarrow \hat{x}$ und $(x_n, y(x_n)) \in K$ für alle n. Also gibt es eine Teilfolge $(\tilde{x}_n)$ von (x_n) mit $(\tilde{x}_n, y(\tilde{x}_n)) \longrightarrow (\hat{x}, \hat{y}_1) \in K$. Ist für $(\hat{x}, \hat{y})$ $\varepsilon = \varepsilon(\hat{x}, \hat{y}) > 0$ so definiert, wie in Teil a) für (x_0, y_0), so ist für hinreichend große n das

$$\text{AWP} \qquad y' = f(x, y) \qquad \text{mit} \quad y_n = y(\tilde{x}_n) \quad \text{von oben}$$

mindestens in $[\tilde{x}_n, \tilde{x}_n + \varepsilon/2]$ lösbar und somit ist y über $\hat{x}$ hinaus fortsetzbar. □

Besonders einfache Differentialgleichungen können mit Hilfe des Picard'schen Iterationsverfahrens tatsächlich explizit gelöst werden, z. B.:

Beispiel 3.5 Für das Anfangswertproblem

$$\text{AWP} \qquad y' \; = \; 2xy \, , \qquad y(0) = y_0$$

liefert die Iteration

$$\begin{aligned} y_0(x) &= y_0 \\ y_1(x) &= y_0 + 2\int_0^x t y_0 \,\mathrm{d}t = y_0 + y_0 x^2 = y_0(1+x^2)\,, \\ y_2(x) &= y_0 + 2\int_0^x t y_0(1+t^2)\,\mathrm{d}t = y_0(1+x^2+\frac{1}{2}x^4)\,, \end{aligned}$$

und weiter durch Induktion

$$y_k(x) = y_0\Big(1+x^2+\frac{1}{2!}x^4+\frac{1}{3!}x^6+\ldots+\frac{1}{k!}x^{2k}\Big)\,.$$

Diese Folge konvergiert auf ganz $\mathbb{R}$ (lokal gleichmäßig) gegen die Lösung des AWP

$$y(x) = y_0 e^{x^2}\,,$$

die man natürlich schneller durch Trennung der Variablen erhalten hätte. #

Der folgende Satz liefert uns mehr Information über den (evtl. maximalen) Bereich, auf dem das

$$\text{AWP} \qquad y' = f(x,y)\,, \quad y(x_0) = y_0$$

lösbar ist.

Satz 3.6 *a) Sei* $G=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{C}^m : x_0\le x\le x_0+a\,,\ |y-y_0|\le b\Big\}$, $f:G\longrightarrow\mathbb{C}^m$ *stetig, und erfülle eine Lipschitzbedingung bezüglich* y. *Ist* $M := \max\{|f(x,y)| : (x,y)\in G\}$ *und* $\alpha := \min\{a, b/M\}$, *so ist das AWP auf* $[x_0, x_0+\alpha]$ *(eindeutig) lösbar. Entsprechendes gilt für ein Intervall links von* x_0.

b) Ist $G=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{C}^m : x_0\le x\le x_0+a\Big\}$ *ein* ***Streifen,*** $f:G\longrightarrow\mathbb{C}^m$ *stetig, und erfüllt* f *eine Lipschitzbedingung bezüglich* y, *so ist das AWP auf ganz* $[x_0, x_0+a]$ *eindeutig lösbar. Entsprechendes gilt für einen Streifen links von* x_0.

c) Ist $G=\mathbb{R}\times\mathbb{C}^m$, f *stetig, und erfüllt* f *eine Lipschitzbedingung bezüglich* y, *so ist das AWP auf ganz* $\mathbb{R}$ *eindeutig lösbar.*

Beweis. Die Eindeutigkeit ergibt sich in jedem Fall unmittelbar aus Satz **??**. Es bleibt also die jeweilige Existenzaussage zu beweisen.

a) Wegen $|y'(x)| \le M$ stößt die Lösung frühestens bei $x_0 + a$ oder $x_0 + b/M$ an den Rand von G, je nachdem, welches der kleinere Wert ist. Mit Satz **??** b) folgt damit die Behauptung.

b) Mit $M_0 := \max\Big\{|f(x,0)| : x_0 \le x \le x_0 + a\Big\}$ gilt offenbar auf Grund der Lipschitzbedingung

$$|f(x,y)| = M_0 + L|y|$$

und somit für $g(x) := (1 + |y(x)|^2)^{1/2}$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{g(x)} \operatorname{Re}(y(x), y'(x)) \le \frac{1}{g(x)} |y(x)|\,|f(x,y(x))| \\ &\le |f(x,y(x))| \le M_0 + L|y(x)| \le Kg(x)\,. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$|y(x)| \le g(x) \le K'e^{Kx}$$

in dem Bereich, in dem y existiert. Also kann die Lösung den Rand des Streifens frühestens bei $x_0 + b$ erreichen.

c) Dies folgt aus Teil b), da die Lösung auf jedem Streifen rechts von x_0 existiert. □

3.3 Gleichungen n–ter Ordnung

Was liefern die obigen Resultate für Gleichungen erster Ordnung nun für ***Gleichungen n–ter Ordnung***? Wir betrachten dazu Gleichungen

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{n-1})$$

mit $f : G \longrightarrow \mathbb{C}^m$, $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^{nm}$ offen. Man sagt in diesem Fall, f erfüllt (ggf. lokal) eine ***Lipschitzbedingung*** bezüglich y, wenn für

$$f(x,Y) = f(x, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}), \quad Y = (y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$$

gilt

$$|f(x,Y) - f(x,\tilde{Y})| \le L|Y - \tilde{Y}|\,.$$

Satz 3.7 *Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^{mn}$ offen, $f : G \longrightarrow \mathbb{C}^m$ stetig und erfülle lokal eine Lipschitzbedingung bezüglich y.*

a) ***Eindeutigkeit***: *Sind $y, z : I \longrightarrow \mathbb{C}^m$ Lösungen von*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{n-1}) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = z(x_0), \dots, \; y^{(n-1)}(x_0) = z^{(n-1)}(x_0)\,,$$

so gilt $y(x) = z(x)$ für alle $x \in I$.

b) ***Existenz***: *Ist $(x_0, y_{0,0}, y_{0,1}, \dots, y_{0,n-1}) \in G$, so existiert ein $\varepsilon > 0$ so, daß in $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ genau eine Lösung des Anfangswertproblems*

$$\text{AWP} \quad \begin{aligned} y^{(n)} &= f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \\ y^{(j)}(x_0) &= y_{0,j} \qquad \text{für} \quad j = 0, 1, \dots, n-1 \quad (\, y^{(0)}(\cdot) = y(\cdot)\,) \end{aligned}$$

existiert.

(Wie für Gleichungen erster Ordnung lassen sich auch hier genauere Aussagen darüber machen, wie groß der Bereich ist, in dem die Lösung existiert, vgl. Satz **??***.)*

Beweis. Wir wissen, daß dieses Anfangswertproblem äquivalent ist zu folgendem Anfangswertproblem erster Ordnung für $Y = (y_0, \dots, y_{n-1})$

$$\text{AWP} \qquad Y' = \tilde{f}(x, Y)\,, \quad Y(x_0) = (y_{0,0},\, y_{0,1}, \dots, y_{0,n-1})\,,$$

wobei $\tilde{f}$ definiert ist durch

$$\tilde{f}(x, Y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ f(x, y_0, \dots, y_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} \left| f(x, y_0, \dots, y_{n-1}) - f(x, \tilde{y}_0, \dots, \tilde{y}_{n-1}) \right| &\le |\tilde{f}(x, Y) - \tilde{f}(x, \tilde{Y})| \\ &\le |y_1 - \tilde{y}_1| + \dots + |y_{n-1} - \tilde{y}_{n-1}| + \left| f(x, y_0, \dots, y_{n-1}) - f(x, \tilde{y}_0, \dots, \tilde{y}_{n-1}) \right| \\ &\le \sqrt{n-1}\,|Y - \tilde{Y}| + \left| f(x, y_0, \dots, y_{n-1}) - f(x, \tilde{y}_0, \dots, \tilde{y}_{n-1}) \right| \end{aligned}$$

erfüllt offenbar $\tilde{f}$ genau dann (lokal) eine Lipschitzbedingung bezüglich Y, wenn f (lokal) eine Lipschitzbedingung bezüglich y erfüllt. Damit ergibt sich die Behauptung aus den obigen Resultaten über Gleichungen erster Ordnung. □

3.4 Zur stetigen Abhängigkeit von den Daten

In diesem kurzen Abschnitt soll ein einfaches Resultat über die stetige Abhängigkeit der Lösung einer Differentialgleichung (erster Ordnung) $y' = f(x,y)$ von den „***Daten***" bewiesen werden. Unter Daten wollen wir hier verstehen:

— die „rechte Seite", d. h. die Funktion $f(\cdot,\cdot)$,

— den Anfangswert y_0 an der vorgegebenen (festen) Anfangsstelle x_0.

(Natürlich könnte man auch die Anfangsstelle x_0 zu den Daten rechnen und die stetige Abhängigkeit von x_0 untersuchen. Ist die Anfangsstelle $\tilde{x}_0$ statt x_0, so bedeutet dies nichts anderes als ein Ersetzen der rechten Seite durch $\tilde{f}(x,y) = f(x + (\tilde{x}_0 - x_0), y)$; wenn f z. B. gleichmäßig stetig bezüglich x ist, ist damit die stetige Abhängigkeit von x_0 im folgenden Resultat enthalten.)

Der folgende Satz sagt im wesentlichen aus: Wenn die rechte Seite $f(\cdot,\cdot)$ und der Anfangswert nur „wenig" verändert werden, ändert sich auch die Lösung des Anfangswertproblems (zumindest in einem „kleinen" Intervall um die Anfangsstelle x_0) nur „wenig".

Wir betrachten die Anfangswertprobleme

$$\begin{aligned} y' &= f(x,y)\,, & y(x_0) &= y_0\,, \\ z' &= g(x,z)\,, & z(x_0) &= z_0\,. \end{aligned}$$

Die Voraussetzungen des Satzes sind so, daß das erste Anfangswertproblem auf dem zur Diskussion stehenden Intervall existiert, und eindeutig bestimmt ist (Lipschitzbedingung für f). Falls das zweite Anfangswertproblem nicht eindeutig lösbar sein sollte, ist der Satz so zu verstehen, daß er für jede Lösung z gilt. Fordert man für g eine lokale Lipschitzbedingung, so ist auch das zweite Anfangswertproblem auf dem fraglichen Intervall eindeutig lösbar. Im übrigen sind die Voraussetzungen an f und g völlig symmetrisch, die Rollen von f und g können also ausgetauscht werden.

Satz 3.8 *Sei* $J \subset \mathbb{R}$ *ein Intervall,* $D \subset \mathbb{C}^m$ *(oder* $\mathbb{R}^m$ *) offen,* $f, g : J \times D \longrightarrow \mathbb{C}^m$ *(oder* $\mathbb{R}^m$ *),* $x_0 \in J$ *,* $a \in D$ *,* $r, \varrho > 0$ *mit* $[x_0, x_0 + r] \subset J$ *und* $K(a, 2\varrho) \subset D$ *. Für* $x \in [x_0, x_0 + r]$ *und* $y, z \in K(a, 2\varrho)$ *gelte mit geeigneten* $\beta, \gamma, \varepsilon > 0$

$$|f(x,y)| \le \beta\,, \qquad |g(x,y)| \le \beta\,,$$

$$|f(x,y) - f(x,z)| \le \gamma|y - z|\,,$$

$$|f(x,y) - g(x,y)| \le \varepsilon\,.$$

Dann gilt für y_0, z_0, x *mit* $y_0, z_0 \in K(a, \varrho)$ *und* $x_0 \le x \le x_0 + r_0$ *mit* $r_0 := \min\{r, \varrho/\beta\}$

$$|y(x) - z(x)| \le |y_0 - z_0|\, e^{\gamma|x - x_0|} + \frac{\varepsilon}{\gamma}\left(e^{\gamma(x - x_0)} - 1\right).$$

(Es sei angemerkt, daß der erste Term verschwindet, wenn die Anfangswerte gleich sind, der zweite dann, wenn die rechten Seiten gleich sind.) Die entsprechende Aussage gilt für ein Intervall links von x_0 *.*

Beweis. Das erste Anfangswertproblem ist auf Grund der Voraussetzungen an f auf dem Intervall $[x_0, x_0 + r_0]$ eindeutig lösbar mit $y(x) \in K(a, 2\varrho)$ für x aus diesem Intervall. Sofern das zweite Anfangswertproblem lösbar ist, gilt

$$|z(x) - z_0| \le \left| \int_{x_0}^{x} g(t, z(t))\, dt \right| \le \beta|x - x_0|$$

und somit auch $z(x) \in K(a, 2\varrho)$ für $x \in [x_0, x + r_0]$. Deshalb können alle Voraussetzungen an f und g benutzt werden. Wir erhalten zunächst

$$\begin{aligned} |y'(x) - z'(x)| &= \Big| f(x, y(x)) - g(x, z(x)) \Big| \\ &\le \Big| f(x, y(x)) - f(x, z(x)) \Big| + \Big| f(x, z(x)) - g(x, z(x)) \Big| \\ &\le \gamma|y(x) - z(x)| + \varepsilon\,, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,|y(x)-z(x)|^2 &= 2\,\mathrm{Re}\,\Big(y(x)-z(x),\,y'(x)-z'(x)\Big) \\
&\le 2|y(x)-z(x)|\,|y'(x)-z'(x)| \\
&\le 2\Big\{\gamma|y(x)-z(x)|\,+\,\varepsilon\Big\}\,|y(x)-z(x)| \\
&= 2\gamma|y(x)-z(x)|^2\,+\,2\varepsilon|y(x)-z(x)|\,,
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,|y(x)-z(x)|^2\;-\;2\gamma|y(x)-z(x)|^2\;\le\;2\varepsilon|y(x)-z(x)|\,.
$$

Setzen wir nun

$$
\psi(x)\;:=\;e^{-\gamma(x-x_0)}|y(x)-z(x)|\,,
$$

so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\psi(x)\psi'(x) &= \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\psi(x)^2\;=\;\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,e^{-2\gamma(x-x_0)}\,|y(x)-z(x)|^2 \\
&= \frac{1}{2}\,e^{-2\gamma(x-x_0)}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\Big|y(x)-z(x)\Big|^2-2\gamma\Big|y(x)-z(x)\Big|^2\right\} \\
&\le e^{-2\gamma(x-x_0)}\varepsilon|y(x)-z(x)| \\
&= \varepsilon e^{-\gamma(x-x_0)}\psi(x)\,.
\end{aligned}
$$

Für den Rest des Beweises müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

Ist $\psi(x)=0$, so ist die Behauptung offensichtlich richtig.

Sei also $\psi(x)\neq 0$. Wir definieren

$$
t_0\;=\;t_0(x)\;:=\;\inf\Big\{t\in(x_0,x)\;:\;\psi(s)>0\qquad\text{für}\quad s\in(t,x)\Big\}\,,
$$

das ist das kleinste t_0, für das ψ auf (t_0,x) positiv ist; wegen der Stetigkeit von ψ ist also $\psi(t_0)=0$. In (t_0,x) kann die zuletzt bewiesene Ungleichung durch $\psi(x)$ dividiert werden, d. h. es gilt

$$
\psi'(t)\;\le\;\varepsilon e^{-\gamma(t-x_0)}\qquad\text{für}\quad t\in(t_0,x)\,,
$$

also nach Integration

$$\psi(x) \;=\; \psi(t_0) \;+\; \frac{\varepsilon}{\gamma}\Big\{e^{-\gamma(t-x_0)} \;-\; e^{-\gamma(x-x_0)}\Big\}\,.$$

Multiplikation mit $e^{\gamma(x-x_0)}$ liefert

$$\begin{aligned}
|y(x)-z(x)| &\le e^{\gamma(x-x_0)}\psi(t_0) + \frac{\varepsilon}{\gamma}\left\{e^{\gamma(x-t_0)} - 1\right\} \\
&= \begin{cases} 0 + \frac{\varepsilon}{\gamma}\Big\{e^{\gamma(x-t_0)} - 1\Big\} & \text{falls} \quad t_0 > x_0\,, \\ \Big|y(x_0) - z(x_0)\Big|e^{\gamma(x-x_0)} + \frac{\varepsilon}{\gamma}\Big\{e^{\gamma(x-x_0)} - 1\Big\} & \text{falls} \quad t_0 = x_0 \end{cases} \\
&\le \Big|y_0 - z_0\Big|e^{\gamma(x-x_0)} + \frac{\varepsilon}{\gamma}\Big\{e^{\gamma(x-x_0)} - 1\Big\}\,.
\end{aligned}$$

Das ist die behauptete Abschätzung. □

Explizite Berechnung der Beispiele

— $f(x,y) = \gamma y$ und $g(x,z) = \gamma z$ mit $y_0 \neq z_0$, also

$$\begin{aligned}
y(x) \;&=\; y_0 e^{\gamma(x-x_0)}, \quad z(x) \;=\; z_0 e^{\gamma(x-x_0)}\,, \\
|y(x)-z(x)| \;&=\; |y_0 - z_0| e^{\gamma(x-x_0)}\,.
\end{aligned}$$

— $f(x,y) = \gamma y$ und $g(x,z) = \gamma z + \varepsilon$ mit $y_0 = z_0$

$$\begin{aligned}
y(x) \;&=\; y_0 e^{\gamma(x-x_0)}, \quad z(x) \;=\; y_0 e^{\gamma(x-x_0)} \;+\; \frac{\varepsilon}{\gamma}\left(e^{\gamma(x-x_0)} - 1\right) \\
|y(x)-z(x)| \;&=\; \frac{\varepsilon}{\gamma}\left(e^{\gamma(x-x_0)} - 1\right)
\end{aligned}$$

zeigt, daß die im Satz angegebenen Abschätzungen, obwohl sie sehr grob erscheinen, optimal sind.

3.5 Übungsaufgaben

1. Man zeige (ohne die Differentialgleichung explizit zu lösen): Das Anfangswertproblem

$$y' = \left\{(x-1)^2 + (y-3)^2\right\}^{-1}, \qquad y(0) = 0$$

ist auf ganz $\mathbb{R}$ eindeutig lösbar.

2. Man zeige (ohne die Differentialgleichung explizit zu lösen): Die Anfangswertprobleme

$$y' = (1-y^4)y,\ y(0) = y_0 \qquad \text{mit} \qquad -1 \le y_0 \le 1$$

sind auf ganz $\mathbb{R}$ eindeutig lösbar. Die Lösungen sind beschränkt durch $|y(x)| \le 1$. Man skizziere die Lösungen.

3. Man zeige, daß das AWP

$$y' = (y-1)\,|y|^{1/2}, \quad y(0) = y_0 > 1$$

nicht für alle $x > 0$ lösbar ist.

Anleitung: Man vergleiche die Lösung mit der des AWP: $z' = (z-1)^{3/2}$, $z(0) = y_0$.

4. Ein Massepunkt mit Masse m und Koordinaten $x(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))$ bewegt sich in einem Kraftfeld, das ein zweimal stetig differenzierbares Potential $V : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ besitzt:

$$mx'' = -\operatorname{grad} V(x)\,.$$

a) Man transformiere dieses System in ein System erster Ordnung und zeige, daß dieses lokal eine Lipschitzbedingung erfüllt.

b) Ist $x : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Lösung des Anfangswertproblems mit $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x_1$ $(t_0 \in J,\ x_0, x_1 \in \mathbb{R}^3)$, so gilt

$$V(x(t)) \le \frac{m}{2}|x_1|^2 + V(x_0) \qquad \text{für alle} \quad t \in J\,.$$

Anleitung: Man zeige, daß die ***Energie*** $E(t) = \frac{m}{2}|x'(t)|^2 + V(x(t))$ konstant ist.

c) Gilt $V(x) \longrightarrow \infty$ für $x \longrightarrow \infty$, so sind $x(t)$ und $x'(t)$ beschränkt.

d) Ist $V(x) \ge c > -\infty$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$, so ist jedes Anfangswertproblem auf ganz $\mathbb{R}$ lösbar.

5. Man bestimme die Lösungsmatrix von

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} y \qquad \text{für} \quad x_0 = 0$$

(mit Hilfe des Picard'schen Iterationsverfahrens).

4 Systeme linearer Differentialgleichungen, allgemeiner Fall

In diesem Abschnitt betrachten wir Systeme linearer Differentialgleichungen erster Ordnung

$$y' = A(x)y + b(x) \qquad (x \in J \subset \mathbb{R})$$

mit einem beliebigen Intervall $J \subset \mathbb{R}$ und

$$A: \ J \longrightarrow \mathbb{C}^{m \times m} \quad (= m \times m\text{–Matrizen}), \qquad b: \ J \longrightarrow \mathbb{C}^m .$$

Gesucht sind stetig differenzierbare Lösungen

$$y = (\eta_1, \ldots, \eta_m): \ J \longrightarrow \mathbb{C}^m .$$

Ausführlich geschrieben lautet das Differentialgleichungssystem also

$$\begin{aligned} \eta_1'(x) &= \sum_{k=1}^m a_{1k}(x)\eta_k(x) + b_1(x) , \\ &\vdots \\ \eta_m'(x) &= \sum_{k=1}^m a_{mk}(x)\eta_k(x) + b_m(x) , \end{aligned}$$

bzw. etwas abgekürzt

$$\eta_j'(x) = \sum_{k=1}^m a_{jk}(x)\eta_k(x) + b_j(x) \qquad (j = 1, \ldots, m) .$$

Wir betrachten zunächst den allgemeinen Fall, wo $A(\cdot)$ tatsächlich von x abhängt (variable Koeffizienten) und untersuchen dann im folgenden Abschnitt speziell den Fall, wo $A(\cdot)$ konstant ist (konstante Koeffizienten).

4.1 Die Lösungsmatrix

Die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen von Anfangswertproblemen ist in diesem Fall unter sehr allgemeinen Bedingungen beweisbar:

Satz 4.1 *Sind* $A : J \longrightarrow \mathbb{C}^{m\times m}$ *und* $b : J \longrightarrow \mathbb{C}^m$ *stetig (d. h. alle* $a_{jk}(\cdot)$ *und* $b_j(\cdot)$ *sind stetig),* $x_0 \in J$, $y_0 \in \mathbb{C}^m$ *, so ist das*

$$\text{AWP} \qquad y' = A(x)y + b(x)\,, \quad y(x_0) = y_0$$

in ganz J *eindeutig lösbar.*

Beweis. Wir zeigen: Ist J_0 ein kompaktes Teilintervall von J und

$$G_0 := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^m : x \in J_0\Big\} \subset G := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^m : x \in J\Big\}\,,$$

so erfüllt die rechte Seite

$$f(x,y) := A(x)y + b(x)$$

in G_0 eine Lipschitzbedingung (und somit erfüllt f lokal eine Lipschitzbedingung in G):

$$\begin{aligned}
|f(x,y) - f(x,\tilde y)| &= |A(x)\,(y-\tilde y)| \\
&\le \Big\{ \sum_{j=1}^m \Big| \sum_{k=1}^m a_{jk}(x)\,(\eta_k - \tilde\eta_k)\Big|^2\Big\}^{1/2} \\
&\quad \Big(\text{mit} \quad L' := \max\Big\{|a_{jk}(x)| : \ 1 \le j,\, k \le m,\ x \in J_0\Big\}\Big) \\
&\le L'\Big\{ \sum_{j=1}^m \Big| \sum_{k=1}^m |\eta_k - \tilde\eta_k|\ \Big|^2\Big\}^{1/2} \\
&\le L'\Big\{ \sum_{j=1}^m \Big(\sum_{k=1}^m 1\Big) \sum_{k=1}^m |\eta_k - \tilde\eta_k|^2\Big\}^{1/2} \\
&= mL'|y-\tilde y| = L|y-\tilde y| \qquad (\text{mit } L := mL')\,.
\end{aligned}$$

Mit Satz **??** b) folgt, daß das AWP auf ganz J_0 eindeutig lösbar ist. Da J_0 ein beliebiges kompaktes Teilintervall von J ist, folgt damit die Behauptung. □

Im folgenden untersuchen wir die Struktur der Lösungsmenge eines linearen Systems genauer:

Satz 4.2 *Das Matrix–wertige Anfangswertproblem*

$$\text{AWP} \qquad Y' = A(x)\,Y\,, \qquad Y(x_0) = E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

besitzt für jedes $x_0 \in J$ *genau eine Lösung* $Y: J \longrightarrow \mathbb{C}^{m\times m}$. *Für jedes* $y_0 \in \mathbb{R}^m$ *ist* $y(x) := Y(x)y_0$ *die (eindeutig bestimmte) Lösung des*

$$\text{AWP} \qquad y' = A(x)\,y\,, \qquad y(x_0) = y_0\,.$$

Die Matrix–Funktion $Y(\cdot)$ *heißt die* ***Lösungsmatrix*** *des Systems (zum Anfangspunkt* x_0 *); für jedes* $x \in J$ *ist* $Y(x)$ *invertierbar.*

Beweis. Für jedes $j \in \{1,\ldots,m\}$ sei $y_j(\cdot)$ die (eindeutig bestimmte) Lösung des

$$\text{AWP} \qquad y_j' = A(x)\,y_j\,, \qquad y_j(x_0) = e_j = (\delta_{1j},\ldots,\delta_{mj})^t\,.$$

$Y(x)$ sei die Matrix mit den Spalten $y_j(x)$,

$$Y(x) := \Big(y_1(x) \vdots y_2(x) \vdots \ldots \vdots y_m(x)\Big)\,.$$

Offensichtlich ist $Y(\cdot)$ stetig differenzierbar, und es gilt

$$\begin{aligned} Y(x_0) &= \Big(e_1 \vdots e_2 \vdots \ldots \vdots e_m\Big) = E\,, \\ Y'(x) &= \Big(y_1'(x) \vdots y_2'(x) \vdots \ldots \vdots y_m'(x)\Big) \\ &= \Big(A(x)y_1(x) \vdots A(x)y_2(x) \vdots \ldots \vdots A(x)y_m(x)\Big) \\ &= A(x)\,Y(x)\,, \end{aligned}$$

d. h. $Y(\cdot)$ ist die gesuchte matrixwertige Funktion; die Eindeutigkeit folgt daraus, daß die j–te Spalte von $Y(\cdot)$ notwendig die Lösung des AWP $y_j' = A(x)y_j$, $y_j(x_0) = e_j$ ist.

Weiter gilt

$$Y(x_0)y_0 = Ey_0 = y_0\,,$$

$$(Y(x)y_0)' = Y'(x)y_0 = (A(x)Y(x))y_0 = A(x)\,(Y(x)y_0)\,,$$

d. h. $y(x) := Y(x)y_0$ löst das AWP $y' = A(x)y,\, y(x_0) = y_0$.

Es bleibt die Invertierbarkeit von $Y(x)$ zu beweisen. Nehmen wir an, daß $Y(x_1)$ nicht invertierbar ist. Dann gibt es ein $y_0 \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ mit $Y(x_1)y_0 = 0$. Die Lösung des AWP $y' = A(x)y$, $y(x_0) = y_0$ erfüllt also bei x_1 die Anfangsbedingung $y(x_1) = 0$ und ist somit (Eindeutigkeitssatz) identisch gleich 0 , im Widerspruch zu $y(x_0) = y_0 \neq 0$. □

Um die Inverse der Lösungsmatrix differenzieren zu können, benötigen wir den folgenden

Hilfssatz 4.3 *Sei $Y : J \longrightarrow \mathbb{C}^{m\times m}$ stetig differenzierbar und $Y(x)$ invertierbar für alle $x \in J$. Dann ist $Z(\cdot) = Y(\cdot)^{-1}$ in J stetig differenzierbar und es gilt*

$$Z'(x) \;=\; -Z(x)Y'(x)Z(x) \;=\; -Y(x)^{-1}Y'(x)Y(x)^{-1} .$$

(Das Resultat ist insbesondere auf Lösungsmatrizen anwendbar. Man vergleiche die obige Formel mit der Formel für die Ableitung der Inversen einer reellwertigen Funktion: $(1/y)'(x) = -y'(x)y(x)^{-2}$. Man beachte, daß $Y'(x)$ und $Y(x)^{-1}$ i. allg. nicht vertauschbar sind.)

Beweis. Wir beweisen zunächst die Stetigkeitt von $Z : J \longrightarrow \mathbb{C}^{m\times m}$. Nach der Cramerschen Regel hat jedes Matrixelement von $Z(\cdot)$ die Form

$$(\mathrm{Det}\; Y(\cdot))^{-1} \times \{\text{Polynom in den Matrixelementen von } Y(\cdot)\} .$$

Also ist jedes Matrixelement von $Z(\cdot)$, und somit $Z(\cdot)$ selbst, stetig.

Damit folgt nun auch leicht die Differenzierbarkeit und die Formel für die Ableitung:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(Z(x+h) - Z(x)\Big) \;&=\; \lim_{h\to 0} Z(x+h)\,\frac{1}{h}\Big(Y(x) - Y(x+h)\Big)Z(x) \\ &=\; -Z(x)Y'(x)Z(x) . \end{aligned}$$

□

Korollar 4.4 *Ist $Y(\cdot)$ die Lösungsmatrix von $y' = A(x)y$ (zum Anfangspunkt x_0), so ist $(Y(\cdot)^{-1})^t$ die Lösungsmatrix des* ***transponierten Systems*** *$Z' = -A(x)^tZ$. (Dabei ist A^t die zu A transponierte Matrix; es gilt offenbar $(AB)^t = B^t A^t$, $A'(x)^t = (A(x)^t)'$.)*

Beweis. Sei wieder $Z(\cdot) = Y(\cdot)^{-1}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(Z(x)^t)' &= Z'(x)^t = -\Big(Z(x)Y'(x)Z(x)\Big)^t \\
&= -\Big(Z(x)A(x)Y(x)Z(x)\Big)^t = -\Big(Z(x)A(x)\Big)^t \\
&= -A(x)^t Z(x)^t\,, \\
Z(x_0)^t &= \Big(Y(x_0)^{-1}\Big)^t = E^t = E\,.
\end{aligned}$$

□

4.2 Fundamentalsystem und Lösungsmatrix

Wir betrachten weiterhin das homogene System 1. Ordnung

$$y' = A(x)y\,, \quad x \in J\,, \quad y : J \longrightarrow \mathbb{C}^m\,.$$

Ein System von m Funktionen $\{y_1, \ldots, y_m\}$ heißt ein ***Fundamentalsystem*** dieser Differentialgleichung, wenn gilt

(a) Die Funktionen $y_1, \ldots, y_m$ sind Lösungen der Differentialgleichung,

(b) die Funktionen $y_1, \ldots, y_m$ sind linear unabhängig, d. h. aus $\sum_{j=1}^m c_j y_j(x) = 0$ für alle $x \in J$ folgt $c_j = 0$ für $j = 1, \ldots, m$.

Die Forderung (b) ist äquivalent zu

(b') für jedes $x \in J$ sind die Vektoren $y_1(x), \ldots, y_m(x)$ linear unabhängig in $\mathbb{C}^m$, oder

(b'') es gibt ein $x^* \in J$ so, daß die Vektoren $y_1(x^*), \ldots, y_m(x^*)$ in $\mathbb{C}^m$ linear unabhängig sind.

Zum ***Beweis***: $(b) \Longrightarrow (b')$: Nehmen wir an, daß (b') nicht gilt, d. h. es gibt ein $x_0 \in J$ und $(c_1, \ldots, c_m) \neq (0, \ldots, 0)$ mit $\sum c_j y_j(x_0) = 0$. Dann ist $y(\cdot) = \sum c_j y_j(\cdot)$ die Lösung des AWP $y' = A(x)y,\ y(x_0) = \sum c_j y_j(x_0) = 0$, also $y(x) = 0$ für alle $x \in J$, d. h. (b) gilt nicht. — Die Implikationen $(b') \Longrightarrow (b'')$ und $(b'') \Longrightarrow (b)$ sind offensichtlich.

Die oben benutzten Lösungen $y_j(\cdot)$ mit $y_j(x_0) = e_j \quad (j = 1, \ldots, m)$ bilden offenbar ein spezielles Fundamentalsystem. Die Lösungsmatrix läßt sich aber auch mit Hilfe eines beliebigen Fundamentalsystems erzeugen:

Satz 4.5 *Ist* $\{z_1, \ldots, z_m\}$ *ein (beliebiges) Fundamentalsystem von* $y' = A(x)y$ *und* $Z(x)$ *die Matrix mit den Spalten* $z_1(x), \ldots, z_m(x)$ *,*

$$Z(x) := \Big(z_1(x) \,\vdots\, z_2(x) \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, z_m(x)\Big),$$

so ist $Z(x)$ *für jedes* $x \in J$ *invertierbar und es gilt*

$$\begin{aligned} Z(x) &= Y(x)\, Z(x_0)\,, \\ Y(x) &= Z(x)\, Z(x_0)^{-1}\,, \end{aligned}$$

wobei $Y(\cdot)$ *die Lösungsmatrix zum Anfangspunkt* x_0 *ist.*

Beweis. Auf Grund des obigen Resultats gilt offenbar

$$z_j(x) = Y(x) z_j(x_0)\,.$$

Damit folgt sofort die letzte Behauptung

$$Z(x) = Y(x)\, Z(x_0)\,.$$

Da $\{z_1, \ldots, z_m\}$ ein Fundamentalsystem ist, ist die Matrix

$$Z(x) = \Big(z_1(x) \,\vdots\, z_2(x) \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, z_m(x)\Big)$$

invertierbar für jedes $x \in J$. Multiplikation der eben bewiesenen Identität mit $Z(x_0)^{-1}$ von rechts ergibt

$$Z(x)\, Z(x_0)^{-1} = Y(x)\,. \qquad \square$$

Korollar 4.6 *Sei* $\{z_1, \ldots, z_m\}$ *ein (beliebiges) Fundamentalsystem. Dann ist jede Lösung der homogenen Gleichung* $y' = A(x)y$ *eine Linearkombination der Funktionen* $z_1, \ldots, z_m$ *:*

$$\begin{aligned} y(x) &= Y(x) y_0 = Z(x) \Big(Z(x_0)^{-1} y_0\Big) = Z(x)\, (t_1, \ldots, t_m)^t \\ &= \sum_{j=1}^{m} t_j z_j(x) \qquad (t_j = j\text{–te Komponente von } \; Z(x_0)^{-1} y_0\,). \end{aligned}$$

Die ***Menge der Lösungen*** der homogenen Differentialgleichung $y' = A(x)y$ bildet also einen ***m–dimensionalen Vektorraum*** über $\mathbb{C}$. Jedes ***Fundamentalsystem*** ist eine ***Basis*** dieses Raumes.

4.3 Die inhomogene Gleichung

Nachdem wir einen vollständigen Überblick über die Lösungen des homogenen Systems $y' = A(x)y$ haben, wollen wir nun daran gehen, das inhomogene System

$$y' = A(x)y + b(x) \qquad (b \not\equiv 0)$$

zu untersuchen.

Satz 4.7 *Sei* $\{z_1, \ldots, z_m\}$ *ein (beliebiges) Fundamentalsystem der homogenen Gleichung* $y' = A(x)y$, $\hat{y}$ *eine beliebige Lösung des inhomogenen Systems* $y' = A(x)y + b(x)$. *Dann hat die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems*

$$\text{AWP} \qquad y' = A(x)y + b(x)\,, \qquad y(x_0) = y_0$$

die Gestalt

$$y(x) = \hat{y}(x) + \sum_{j=1}^{m} c_j z_j(x) \qquad (\textit{ mit geeigneten } \; c_j\,)\,;$$

genauer gilt

$$y(x) = \hat{y}(x) + Z(x)\,Z(x_0)^{-1}\,(y_0 - \hat{y}(x_0))\,.$$

Beweis. Da $Z(x)\,Z(x_0)^{-1}$ die Lösungsmatrix des homogenen Systems ist, ist klar, daß das zuletzt angegebene $y(\cdot)$ die inhomogene Gleichung löst. Weiter gilt

$$y(x_0) = \hat{y}(x_0) + Z(x_0)\,Z(x_0)^{-1}(y_0 - \hat{y}(x_0)) = y_0\,,$$

d. h. y hat die richtigen Anfangswerte. Wegen der Eindeutigkeit muß also die Lösung diese Gestalt haben. Da $Z(x)\Big(Z(x_0)^{-1}(y_0 - \hat{y}(x_0))\Big)$ eine Linearkombination der $z_1, \ldots, z_m$ ist, ist damit alles bewiesen. □

Eine explizite Lösungsformel, die nicht die Kenntnis einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung erfordert, gibt der folgende Satz (die im Abschnitt 2.5 gefundene Formel für die Lösung **einer** inhomogenen Differentialgleichung erster Ordnung $(m = 1)$ ist ein Spezialfall hiervon).

Satz 4.8 *Die eindeutig bestimmte Lösung* y *des*

$$\text{AWP} \qquad y' = A(x)y + b(x), \qquad y(x_0) = y_0$$

ist gegeben durch

$$y(x) = Y(x)y_0 + Y(x)\int_{x_0}^{x} Y(t)^{-1}b(t)\,\mathrm{d}t$$

wobei $Y(\cdot)$ *die Lösungsmatrix des homogenen Systems zum Anfangspunkt* x_0 *ist).*

Beweis. Es gilt offenbar

$$\begin{aligned}
y(x_0) &= Y(x_0)y_0 + Y(x_0)\int_{x_0}^{x_0} Y(t)^{-1}b(t)\,\mathrm{d}t \\
&= Ey_0 + E0 = y_0\,, \\
y'(x) &= Y'(x)y_0 + Y'(x)\int_{x_0}^{x} Y(t)^{-1}b(t)\,\mathrm{d}t + Y(x)Y(x)^{-1}b(x) \\
&= A(x)\Big\{Y(x)y_0 + Y(x)\int_{x_0}^{x} Y(t)^{-1}b(t)\,\mathrm{d}t\Big\} + b(x) \\
&= A(x)y(x) + b(x)\,.
\end{aligned}$$

□

Der Beweis des letzten Satzes ist zwar sehr einfach, verrät aber nicht, wie man diese Lösung findet. Deshalb sei hier noch ein anderes Vorgehen beschrieben: Die Spaltenvektoren $y_j(x)$ der Lösungsmatrix bilden für jedes $x \in J$ eine Basis in $\mathbb{C}^m$ (vgl. obige Charakterisierung eines Fundamentalsystems). Es gibt also für die Lösung $y(\cdot)$ des inhomogenen Systems und für jedes $x \in J$ einen Vektor

$$y_0(x) = \Big(\eta_{0,1}(x), \ldots, \eta_{0,m}(x)\Big)^t \in \mathbb{R}^m$$

mit

$$\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{j=1}^{m} \eta_{0,j}(x)y_j(x) = Y(x)y_0(x)\,, \\
y_0(x) &= Y(x)^{-1}y(x)\,.
\end{aligned}$$

Existiert eine stetig differenzierbare Lösung $y(\cdot)$, so ist also wegen $y_0(x) = Y(x)^{-1}y(x)$ auch $y_0(\cdot)$ stetig differenzierbar und wir erhalten durch Einsetzen in die homogene Differentialgleichung

$$\begin{aligned} A(x)Y(x)y_0(x) + b(x) &= A(x)y(x) + b(x) = y'(x) = Y'(x)y_0(x) + Y(x)y_0'(x) \\ &= A(x)Y(x)y_0(x) + Y(x)y_0'(x)\,. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich $Y(x)y_0'(x) = b(x)$ und somit die Differentialgleichung für $y_0(\cdot)$

$$y_0'(x) = Y(x)^{-1}b(x)\,,$$

die durch Integration gelöst werden kann:

$$y_0(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} Y(t)^{-1}b(t)\,dt\,.$$

Einsetzen in $y(x) = Y(x)y_0(x)$ liefert die bereits oben bewiesene Lösungsformel.

Formal haben wir oben in der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung $Y(x)y_0$ den konstanten Vektor y_0 durch einen variablen Vektor $y_0(x)$ ersetzt, und es stellte sich heraus, daß $y_0(\cdot)$ tatsächlich berechnet werden kann. Man nennt deshalb diese Methode die ***Variation der Konstanten***.

4.4 Übungsaufgaben

1. a) Man bestimme die Lösungsmatrix von

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} y \qquad \text{für} \quad x_0 = 0\,.$$

   b) Man löse das Anfangswertproblem

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} x-1 \\ 2x \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Hilfe: $\begin{pmatrix} -x \\ 0 \end{pmatrix}$ ist eine Lösung des inhomogenen Systems.

5 Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

In diesem Abschnitt betrachten wir das lineare Differentialgleichungssystem

$$y' = Ay + b(x)\,,$$

wobei jetzt A eine konstante Matrix ist.

5.1 Bestimmung der Lösungsmatrix, exp(xA)

Um die Lösungsmatrix des Systems zu bestimmen, lösen wir das matrix–wertige

$$\text{AWP} \qquad Y' = AY\,, \qquad Y(x_0) = E$$

mit Hilfe der Picard'schen Iteration:

$$\begin{aligned} Y_0(x) &= E\,, \\ Y_{k+1}(x) &= E + \int_{x_0}^{x} AY_k(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{für} \quad k = 0,\,1,\,2,\ldots \end{aligned}$$

Damit erhalten wir explizit

$$\begin{aligned} Y_1(x) &= E + \int_{x_0}^{x} AE\,\mathrm{d}t = E + (x - x_0)A\,, \\ Y_2(x) &= E + \int_{x_0}^{x} A\Big(E + (t - x_0)A\Big)\,\mathrm{d}t = E + (x - x_0)A + \frac{(x - x_0)^2}{2}\,A^2\,, \end{aligned}$$

und weiter durch Induktion (mit $A^0 = E$)

$$Y_{k+1}(x) = E + \int_{x_0}^{x} A \sum_{j=0}^{k} \frac{(t - x_0)^j}{j!}\,A^j\,\mathrm{d}t = \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(x - x_0)^j}{j!}\,A^j\,.$$

Wie man aus dem Beweis des Existenzsatzes von Picard–Lindelöf (oder aber auch mit dem gleichen Beweis, mit dem man die Konvergenz der Exponentialreihe beweist) sieht, ist diese

Folge auf jedem kompakten Teilintervall von $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergent gegen eine stetige matrix–wertige Funktion

$$Y(x) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^j}{j!} A^j ,$$

die das obige Anfangswertproblem löst, d. h. $Y(\cdot)$ ist die gesuchte Lösungsmatrix.

Die formale Ähnlichkeit mit der Exponentialreihe legt die folgende Schreibweise nahe

$$e^{xA} = \exp(xA) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} A^j .$$

Mit dieser Bezeichnung haben wir

$$Y(x) = \exp\Big\{(x-x_0)A\Big\} .$$

Da Y die homogene Differentialgleichung $Y' = AY$ erfüllt, folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \exp\Big\{(x-x_0)A\Big\} &= Y'(x) = AY(x) \\ &= A \exp\Big\{(x-x_0)A\Big\} , \end{aligned}$$

erneut eine Eigenschaft, die von einer Exponentialfunktion zu erwarten ist.

Beispiel 5.1 Wir wollen für $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ (einen 2×2–***Jordan–Kasten***) e^{xA} berechnen. Zunächst sieht man leicht

$$A^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} , \qquad A^3 = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 \end{pmatrix} ,$$

und durch Induktion allgemein

$$A^j = \begin{pmatrix} \lambda^j & j\lambda^{j-1} \\ 0 & \lambda^j \end{pmatrix} \qquad \text{für} \quad j \in \mathbb{N}_0 .$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} e^{xA} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} A^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \begin{pmatrix} \lambda^j & j\lambda^{j-1} \\ 0 & \lambda^j \end{pmatrix} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x\lambda)^j}{j!} E + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(x\lambda)^{j-1}}{(j-1)!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{x\lambda} & xe^{x\lambda} \\ 0 & e^{x\lambda} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

#

5.2 Diagonalisierbares A

Besonders einfach werden die Verhältnisse, wenn A diagonalisierbar ist, d. h. wenn es eine invertierbare Matrix M gibt so, daß $M^{-1}AM$ Diagonalgestalt hat,

$$M^{-1}AM = \mathrm{Diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix},$$

wobei dann natürlich $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ die Eigenwerte von A sind (mit Vielfachheit gezählt). Es sei hier daran erinnert, daß A genau dann diagonalisierbar ist, wenn A m linear unabhängige Eigenvektoren besitzt; $\mathrm{Diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ ist dann gerade die Darstellung von A bezüglich der Basis, die durch diese Eigenvektoren gebildet wird. A hat sicher dann m linear unabhängige Eigenvektoren, wenn A m verschiedene Eigenwerte hat.

In diesem Fall gilt offenbar

$$A^j = (MDM^{-1})^j = MD^jM^{-1}$$

und somit

$$\begin{aligned} e^{xA} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} A^j = M\Big\{ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} D^j \Big\} M^{-1} \\ &= M \begin{pmatrix} e^{x\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{x\lambda_m} \end{pmatrix} M^{-1}. \end{aligned}$$

M und M^{-1} können wie folgt explizit angegeben werden: Ist $\{a_1, \ldots, a_m\}$ eine Basis aus Eigenvektoren und ist $\{a_1', \ldots, a_m'\}$ eine dazu ***duale Basis***, d. h. es gilt

$$\langle a_j', a_k \rangle = \delta_{jk} \qquad \text{für} \quad j, k = 1, \ldots, m\,,$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt in $\mathbb{C}^m$ ist, d. h. $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^m \overline{\xi_j} \eta_j$, so ist

$$M = (a_1 \vdots a_2 \vdots \ldots \vdots a_m), \qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} \overline{a_1'} \\ \cdots \\ \overline{a_2'} \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ \overline{a_m'} \end{pmatrix},$$

d. h. M ist die Matrix mit den Spalten $a_1, \ldots, a_m$ und M^{-1} ist die Matrix mit den Zeilenvektoren $\overline{a_1'}, \ldots, \overline{a_m'}$, den zu $a_1, \ldots, a_m$ dualen Vektoren.

Für die Lösungsmatrix erhält man damit

$$Y(x) = e^{(x-x_0)A} = M \begin{pmatrix} e^{(x-x_0)\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{(x-x_0)\lambda_m} \end{pmatrix} M^{-1}\,,$$

und somit für das Anfangswertproblem

$$\text{AWP} \qquad y' = Ay, \quad y(x_0) = y_0\,,$$

die Lösung

$$\begin{aligned} y(x) &= Y(x) y_0 = M \begin{pmatrix} e^{(x-x_0)\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{(x-x_0)\lambda_m} \end{pmatrix} M^{-1} y_0 \\ &= M \begin{pmatrix} e^{(x-x_0)\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{(x-x_0)\lambda_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle a_1', y_0 \rangle \\ \langle a_2', y_0 \rangle \\ \vdots \\ \langle a_m', y_0 \rangle \end{pmatrix} \\ &= M \begin{pmatrix} e^{(x-x_0)\lambda_1} \langle a_1', y_0 \rangle \\ e^{(x-x_0)\lambda_2} \langle a_2', y_0 \rangle \\ \vdots \\ e^{(x-x_0)\lambda_m} \langle a_m', y_0 \rangle \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^m \langle a_j', y_0 \rangle e^{(x-x_0)\lambda_j} a_j\,. \end{aligned}$$

Ist speziell A hermitesch, so hat es in jedem Fall m linear unabhängige Eigenvektoren $a_1, \ldots, a_m$, die sogar o. E. als Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^m$ gewählt werden können. Dann ist offenbar $\{a'_1, \ldots, a'_m\} = \{a_1, \ldots, a_m\}$ und somit

$$M^{-1} = \overline{M^t} = M^*, \quad \text{d. h } M \text{ ist } \boldsymbol{unitär}.$$

Für $y(\cdot)$ erhalten wir dann

$$y(x) = \sum_{j=1}^{m} \langle a_j, y_0 \rangle e^{(x-x_0)\lambda_j} a_j .$$

Insgesamt haben wir bewiesen:

Satz 5.2 *a) Sei A eine $m \times m$–Matrix mit m linear unabhängigen Eigenvektoren $a_1, \ldots, a_m$ und zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, außerdem sei $\{a'_1, \ldots, a'_m\}$ eine zu $\{a_1, \ldots, a_m\}$ duale Basis. Dann ist die Lösung des*

$$AWP \qquad y' = Ay, \qquad y(x_0) = y_0$$

gegeben durch

$$y(x) = \sum_{j=1}^{m} \langle a'_j, y_0 \rangle \, e^{(x-x_0)\lambda_j} a_j .$$

b) Ist speziell A hermitesch und $a_1, \ldots, a_m$ eine Orthonormalbasis von Eigenelementen, so gilt

$$y(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \langle a_j, y_0 \rangle \, e^{(x-x_0)\lambda_j} a_j .$$

Dies sind offenbar Linearkombinationen der Lösungen der Anfangswertprobleme mit $y(x_0) = a_j \quad (j = 1, \ldots, m)$, wobei die Entwicklungskoeffizienten durch $\langle a'_j, y_0 \rangle$ bzw. $\langle a_j, y_0 \rangle$ gegeben sind. Für $x = x_0$ hat man gerade die Entwicklung nach der Basis $\{a_1, \ldots, a_m\}$.

Beispiel 5.3 Wir betrachten das System

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} y \, .$$

Aus

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 4\lambda - 8 \\ &= -(\lambda-2)^2(\lambda+2) \end{aligned}$$

folgt, daß $\lambda = 2$ und $\lambda = -2$ Eigenwerte sind, $\lambda = -2$ einfach, $\lambda = 2$ mit (zunächst nur) algebraischer Vielfachheit 2. Den Eigenvektor zu $\lambda = -2$ erhalten wir aus

$$(A + 2E) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \, , \qquad \begin{aligned} 3a - b + 2c &= 0 \, , \\ -a + 3b + 2c &= 0 \, , \\ a + b + 2c &= 0 \, . \end{aligned}$$

Da sich die dritte Gleichung aus den ersten beiden ergibt, bleibt das System zu lösen, das aus den ersten 2 Gleichungen besteht. Es hat (z. B.) die Lösung

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Dies ist (bis auf einen Faktor) **der** Eigenvektor zum Eigenwert -2.

Die Eigenvektoren zu $\lambda = 2$ erhalten wir aus

$$(A - 2E) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \, , \qquad \begin{aligned} -a - b + 2c &= 0 \, , \\ -a - b + 2c &= 0 \, , \\ a + b - 2c &= 0 \, . \end{aligned}$$

Dieses System ist äquivalent zu der einzigen Gleichung

$$a + b - 2c \;=\; 0$$

mit (z. B.) den Lösungen

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Dies sind 2 Eigenvektoren zum Eigenwert 2. Insgesamt hat also A eine Basis von Eigenvektoren a_1, a_2, a_3 zu den Eigenwerten $\lambda_1 = -2$, $\lambda_{2,3} = 2$:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Damit haben wir ein Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2x}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2x}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} .$$

Die zu den Eigenvektoren a_1, a_2, a_3 gehörige duale Basis ist

$$a_1' = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad a_2' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_3' = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Es ist also

$$M \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & -1/2 & 1/4 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

und somit die Lösungsmatrix

$$\begin{aligned} Y(x) = e^{xA} \;&=\; M \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2x} \end{pmatrix} M^{-1} \\ &=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x}) & 0 & \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}) \\ -\frac{1}{2}e^{-2x} & e^{2x} & \frac{1}{2}e^{-2x} \\ -\frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} & -\frac{1}{2}e^{2x} & -\frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-2x} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

zusammen mit

$$\begin{aligned} Y(x)^{-1} &= M \begin{pmatrix} e^{-2x} & & 0 \\ & e^{-2x} & \\ 0 & & e^{2x} \end{pmatrix} M^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^{-2x} - e^{2x}) & 0 & \frac{1}{2}(e^{-2x} + e^{2x}) \\ -\frac{1}{2}e^{2x} & e^{-2x} & \frac{1}{2}e^{2x} \\ -\frac{1}{4}e^{-2x} - \frac{1}{2}e^{2x} & -\frac{1}{2}e^{-2x} & -\frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{2x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ist dann jedes Anfangswertproblem für dieses System lösbar. #

5.3 Ein Hamiltonsches System; Stabilität, Instabilität

Wir betrachten ein mechanisches System mit m Freiheitsgraden mit

Koordinaten $x_1, \ldots, x_m$,

Kinetischer Energie $T = \dfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} (\dot{x}_j)^2 = \dfrac{1}{2}|\dot{x}|^2$,

Potentieller Energie $U = \dfrac{1}{2}\langle x,\, Bx \rangle$

mit einer symmetrischen $m \times m$–Matrix B. Mit den

Impulskoordinaten $p_j = \dot{x}_j \quad (j = 1, \ldots, m)$

ist dann die ***Hamiltonsche Funktion***

$$H(p,x) \;=\; T + U \;=\; \frac{1}{2}\left\{ |p|^2 + \langle x,\, Bx \rangle \right\}.$$

Damit erhalten wir die ***Hamiltonschen Differentialgleichungen***

$$\begin{aligned} \dot{x}_j &= \frac{\partial}{\partial p_j} H(p,x) \;=\; p_j\,, \\ \dot{p}_j &= -\frac{\partial}{\partial x_j} H(p,x) \;=\; -(Bx)_j \end{aligned} \qquad (j = 1, \ldots, m)\,,$$

oder, kompakter geschrieben,

$$\dot{x} = p\,, \quad \dot{p} = -Bx\,.$$

Mit der neuen Funktion $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{2m}$

$$y(t) = \Big(x_1(t), \ldots, x_m(t)\,,\, p_1(t), \ldots, p_m(t)\Big)$$

erhalten wir das Differentialgleichungssystem

$$y' = Ay \qquad \text{mit der Matrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -B & 0 \end{pmatrix}.$$

Aus

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -B & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \quad A^2 = \begin{pmatrix} -B & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix}$$

folgt durch Induktion für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$A^{2k} = \begin{pmatrix} (-B)^k & 0 \\ 0 & (-B)^k \end{pmatrix}, \qquad A^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & (-B)^k \\ (-B)^{k+1} & 0 \end{pmatrix},$$

und somit

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}\, B^n & \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}\, B^n \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} t^{2n+1}}{(2n+1)!}\, B^{n+1} & \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}\, B^n \end{pmatrix}.$$

Da B symmetrisch ist, gilt mit einer Orthonormalbasis $\{b_1, \ldots, b_m\}$ von Eigenelementen,

$$M = (b_1 \vdots b_2 \vdots \ldots \vdots b_m)\,, \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} \overline{b_1} \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ \overline{b_m} \end{pmatrix},$$

und, mit zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_m$,

$$B = M \,\mathrm{Diag}\,(\lambda_1, \dots, \lambda_m) M^{-1} .$$

Im folgenden betrachten wir zwei spezielle Fälle im Detail.

Stabiler Fall: Es sei $U(x) > 0$ für $x \notin 0$, d. h. A ist positiv definit, $\lambda_j > 0$ für $j = 1, \dots, m$. Sei $\nu_j > 0$ so, daß $\lambda_j = \nu_j^2$ gilt. Dann ist

$$\begin{aligned} M^{-1} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} B^n \right\} M &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} \begin{pmatrix} \nu_1^{2n} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \nu_m^{2n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} \nu_1^{2n} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} \nu_m^{2n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \nu_1 t & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \cos \nu_m t \end{pmatrix} , \end{aligned}$$

also

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} B^n = M \begin{pmatrix} \cos \nu_1 t & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \cos \nu_m t \end{pmatrix} M^{-1} .$$

Entsprechend folgt

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} B^n &= M \begin{pmatrix} \frac{1}{\nu_1} \sin_1 t & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\nu_m} \sin \nu_m t \end{pmatrix} M^{-1} , \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+1}}{(2n+1)!} B^{n+1} &= M \begin{pmatrix} -\nu_1 \sin \nu_1 t & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -\nu_m \sin \nu_m t \end{pmatrix} M^{-1} . \end{aligned}$$

Die Lösung des

$$\text{AWP} \qquad y' = Ay , \quad y(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2m}$$

ist gegeben durch

$$y(t) = e^{tA}\begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix}.$$

Dabei berechnen wir zunächst nur die ersten m (Orts–) Komponenten $x(t) = (y_1(t), \ldots, y_m(t))$,

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} B^n x_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} B^n p_0 \\ &= M \begin{pmatrix} \cos\nu_1 t & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \cos\nu_m t \end{pmatrix} M^{-1} x_0 + M \begin{pmatrix} \frac{1}{\nu_1}\sin\nu_1 t & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\nu_m}\sin\nu_m t \end{pmatrix} M^{-1} p_0. \end{aligned}$$

Mit $M = (b_1 \vdots b_2 \vdots \ldots \vdots b_m)$ und $M^{-1} = M^t$ folgt hieraus

$$x(t) = \sum_{j=1}^{m} \Big\{ \langle b_j, x_0 \rangle \cos\nu_j t + \langle b_j, p_0 \rangle \frac{1}{\nu_j} \sin\nu_j t \Big\} b_j .$$

Die letzten m (Geschwindigkeits–) Komponenten $p(t) = (y_{m+1}(t), \ldots, y_{2m}(t))$ erhält man entsprechend, oder einfacher durch Differenzieren dieses Ausdrucks:

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^{m} \Big\{ -\langle b_j, x_0 \rangle \nu_j \sin\nu_j t + \langle b_j, p_0 \rangle \cos\nu_j t \Big\} b_j .$$

Die Lösung ist ***stabil*** weil $y(t)$ (bzw. $x(t)$) **und** $p(t)$) beschränkt bleiben für alle t.

Instabiler Fall: Mindestens ein Eigenwert von B ist negativ. Wir nehmen hier speziell an:

$$\lambda_1 < 0 < \lambda_j \qquad \text{für} \quad j = 2, \ldots, m .$$

Es ist dann

$$\mathrm{Diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \begin{pmatrix} -\nu_1^2 & & & 0 \\ & \nu_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \nu_m^2 \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_m)^n \;=\; \begin{pmatrix} (-1)^n\nu_1^{2n} & & & 0 \\ & \nu_2^{2n} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \nu_m^{2n} \end{pmatrix},$$

und somit

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}B^n x_0 &= M\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}\operatorname{Diag}\Big((-1)^n\nu_1^{2n},\nu_2^{2n},\dots,\nu_m^{2n}\Big)M^{-1} \\
&= M\begin{pmatrix} \cosh\nu_1 t & & & 0 \\ & \cos\nu_2 t & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \cos\nu_m t \end{pmatrix}M^{-1}, \\
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}B^n &= M\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}\operatorname{Diag}\Big((-1)^n\nu_1^{2n},\nu_2^{2n},\dots,\nu_m^{2n}\Big)M^{-1} \\
&= M\begin{pmatrix} \frac{1}{\nu_1}\sinh\nu_1 t & & & 0 \\ & \frac{1}{\nu_2}\sin\nu_2 t & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{\nu_m}\sin\nu_m t \end{pmatrix}M^{-1}, \\
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} t^{2n+1}}{(2n+1)!}B^{n+1} &= M\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} t^{2n+1}}{(2n+1)!}\operatorname{Diag}\Big(-\nu_1^{2},\nu_2^{2},\dots,\nu_m^{2}\Big)^{n+1}M^{-1} \\
&= M\begin{pmatrix} \nu_1\sinh\nu_1 t & & & 0 \\ & -\nu_2\sin\nu_2 t & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -\nu_m\sin\nu_m t \end{pmatrix}M^{-1}.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir in diesem Fall

$$\begin{aligned}
x(t) &= \Big\{\langle b_1,x_0\rangle\cosh\nu_1 t+\langle b_1,p_0\rangle\,\frac{1}{\nu_1}\sinh\nu_1 t\Big\}b_1 \\
&\quad+\sum_{j=2}^{m}\Big\{\langle b_j,x_0\rangle\cos\nu_j t+\langle b_j,p_0\rangle\,\frac{1}{\nu_j}\sin\nu_j t\Big\}b_j\,, \\
y(t) &= \Big\{\langle b_1,x_0\rangle\nu_1\sinh\nu_1 t+\langle b_1,p_0\rangle\cosh\nu_1 t\Big\}b_1 \\
&\quad+\sum_{j=2}^{m}\Big\{-\langle b_j,x_0\rangle\nu_j\sin\nu_j t+\langle b_j,p_0\rangle\cos\nu_j t\Big\}b_j\,.
\end{aligned}$$

Diese Lösung heißt ***instabil***, weil sie i. allg. nicht beschränkt ist; sie ist genau dann beschränkt, wenn $\langle b_1, x_0\rangle = \langle b_1, p_0\rangle = 0$ gilt.

Ist z. B. $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_j = \nu_j^2 > 0$ für $j = 2, \ldots, m$, so erhält man offenbar

$$\begin{aligned} x(t) &= \Big\{\langle b_1, x_0\rangle + \langle b_1, p_0\rangle t\Big\} b_1\,, \\ &\quad + \sum_{j=2}^{m} \Big\{\langle b_j, x_0\rangle \cos\nu_j t + \langle b_j, p_0\rangle \frac{1}{\nu_j}\sin\nu_j t\Big\} b_j\,, \\ y(t) &= \langle b_1, p_0\rangle b_1 + \sum_{j=2}^{m} \Big\{ - \langle b_j, x_0\rangle \nu_j \sin\nu_j t + \langle b_j, p_0\rangle \cos\nu_j t\Big\} b_j\,. \end{aligned}$$

Auch diese Lösung ist unbeschränkt, wenn $\langle b_1, p_0\rangle \neq 0$ gilt.

Mit diesen Informationen ist es nun leicht, alle möglichen Situationen zu studieren.

5.4 Nicht diagonalisierbares **A**

Ist A nicht diagonalisierbar, weil zu wenige $(< m)$ Eigenvektoren existieren, so liegt es nahe, $\exp(xA)$ mit Hilfe der Jordan'schen Normalform zu berechnen (vgl. Beispiel 5.1). Jedes A kann mit Hilfe einer invertierbaren Matrix V auf die Jordan'sche Normalform transformiert werden:

$$A = V \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_n \end{pmatrix} V^{-1}\,, \qquad V^{-1}AV = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_n \end{pmatrix}\,,$$

mit

$$A_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & & 0 \\ 0 & \lambda_j & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_j & 1 \\ 0 & & & 0 & \lambda_j \end{pmatrix} \qquad \textbf{\textit{Jordan–Kasten}}\,;$$

dabei sind die λ_j die Eigenwerte von A. Wie im Beispiel 5.1 kann man berechnen (vgl. auch Übungsaufgabe **??**)

$$\exp(xA_j) = \begin{pmatrix} e^{x\lambda_j} & xe^{x\lambda_j} & \frac{x^2}{2!}e^{x\lambda_j} & \frac{x^3}{3!}e^{x\lambda_j}\dots \\ & e^{x\lambda_j} & xe^{x\lambda_j} & \frac{x^2}{2!}e^{x\lambda_j}\dots \\ & & e^{x\lambda_j} & xe^{x\lambda_j}\dots \\ 0 & & & \dots \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $\exp(xV^{-1}AV)$ setzt sich offenbar aus diesen Kästen zusammen. Die Spalten dieser (großen) Matrix bilden bekanntlich ein Fundamentalsystem des Systems $z' = (V^{-1}AV)z$. Ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$ erhält man hieraus offenbar durch Transformation mit V (für $y = Vz$ gilt $y' = (Vz)' = Vz' = VV^{-1}AVz = Ay$). Unter Berücksichtigung der Rechenregeln für Matrizen erkennt man daran, daß ein Fundamentalsystem existiert, das wie folgt geschrieben werden kann:

$$\begin{pmatrix} p_{j,\ell,1}(x) \\ p_{j,\ell,2}(x) \\ \vdots \\ p_{j,\ell,m}(x) \end{pmatrix} e^{x\lambda_j} \qquad \text{mit} \qquad \begin{array}{l} j = 1,\dots,n\,, \\ \ell = 1,\dots,\dim A_j\,, \end{array}$$

wobei die $p_{j,\ell,m}$ Polynome vom Grad $\ell - 1$ sind. Dies reicht in der Regel aus, um das Differentialgleichungssystem $y' = Ay$ mit Hilfe geeigneter „***Ansätze***" zu lösen:

Beispiel 5.4 $y' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} y$. Aus

$$\det(A - \lambda E) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 4 & -3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2 = 0$$

folgt, daß $\lambda = -1$ Eigenwert mit (algebraischer) Vielfachheit 2 ist. Es gibt aber nur einen Eigenvektor

$$(A + 1E)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0\,, \quad \begin{array}{c} 2a - b = 0 \\ 4a - 2b = 0 \end{array}\,, \quad 2a = b\,, \quad \text{z. B.} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Es ist also hier $n = 1$, $\dim A_1 = 2$. Eine Lösung ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-x} .$$

Eine zweite Lösung hat die Form

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{-x} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} x e^{-x} .$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{pmatrix} -a+c \\ -b+d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} a-b \\ 4a-3b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c-d \\ 4c-3d \end{pmatrix} x$$

und hieraus durch Vergleich der Koeffizienten bei x^1 und x^0:

$$\begin{aligned} -\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c-d \\ 4c-3d \end{pmatrix} \implies \text{(vgl. oben)} \quad \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} , \\ \begin{pmatrix} -a+c \\ -b+d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a-b \\ 4a-3b \end{pmatrix} \implies \begin{matrix} 2a-b=1 \\ 4a-2b=2 \end{matrix} \implies \text{z. B.} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Wir haben damit die weitere Lösung

$$\begin{pmatrix} x \\ -1+2x \end{pmatrix} e^{-x} ,$$

und somit das Fundamentalsystem

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-x} , \quad \begin{pmatrix} x \\ -1+2x \end{pmatrix} e^{-x} .$$

Im Sinne von Satz **??** ist also

$$Z(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ 2e^{-x} & (-1+2x)e^{-x} \end{pmatrix} ,$$

womit man die Lösungsmatrix (z. B. für $x_0 = 0$) erhält:

$$\begin{aligned} Y(x) &= Z(x)Z(0)^{-1} = e^{-x}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & -1+2x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= e^{-x}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & -1+2x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = e^{-x}\begin{pmatrix} 1+2x & -x \\ 4x & 1-2x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dieses $Y(\cdot)$ könnte man natürlich auch leicht finden, indem man für die beiden Spaltenvektoren die Linearkombinationen der obigen Lösungen wählt, die für $x = 0$ die Anfangsbedingungen $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ erfüllen.

Hieraus kann man auch noch leicht berechnen

$$Y(x)^{-1} = e^{x}\begin{pmatrix} 1-2x & x \\ -4x & 1+2x \end{pmatrix},$$

so daß dann jedes inhomogene Anfangswertproblem im Prinzip explizit lösbar wird. #

5.5 Übungsaufgaben

5.1 a) Man löse die Anfangswertprobleme

$$y' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & 0 \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{pmatrix} y, \quad y(0) = e_j \qquad (j = 1, \ldots, m),$$

indem man das System von unten her auflöst.

b) Man gebe die Lösungsmatrix dieses Systems für $x_0 = 0$ an,

5.2 Ein Punkt A, der durch ein „Gummiband“ mit dem Ursprung verbunden ist, bewege sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit u vom Ursprung weg. Auf dem Gummiband bewegt sich ein zweiter Punkt B mit konstanter Geschwindigkeit v (relativ zum Gummiband). Für welche v holt der Punkt B den Punkt A in endlicher Zeit ein?

5.3 Man bestimme ein Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems

$$y' = \begin{pmatrix} 5 & 3 & \sqrt{2} \\ 3 & 5 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} y.$$

5.4 Mit Hilfe der Theorie der Differentialgleichungen zeige man für jede $m \times m$–Matrix A

$$\exp(sA)\,\exp(tA) \;=\; \exp((s+t)A) \qquad \text{für alle} \quad s,\, t \in \mathbb{R}\,.$$

5.5 Man bestimme zwei stetig differenzierbare Funktionen $C,\, S : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\begin{aligned} C'(x) &= -S(x), & S'(x) &= C(x)\,, \\ C(0) &= 1\,, & S(0) &= 0 \end{aligned}$$

und zeige, daß sie durch diese Forderungen eindeutig bestimmt sind.

6 Lineare Differentialgleichungen der Ordnung n

Eine lineare Differentialgleichung der Ordnung n in expliziter Form hat die Gestalt

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= a_0(x)y + a_1(x)y' + \ldots + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + b(x) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x)y^{(j)} + b(x)\,, \end{aligned}$$

wobei wir stets voraussetzen werden, daß die Koeffizientenfunktionen $a_j : J \longrightarrow \mathbb{C}$ und die Funktion $b : J \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$ sind. Im ersten Abschnitt werden wir die allgemeine Lösungstheorie behandeln, während wir im zweiten Abschnitt den Spezialfall konstanter Koeffizienten a_j untersuchen; in letzterem Fall läßt sich ein explizites Lösungsverfahren angeben.

6.1 Allgemeine Theorie

Mit der neuen vektorwertigen Funktion

$$\underline{y}(x) = \begin{pmatrix} y_0(x) \\ y_1(x) \\ \vdots \\ y_{n-1}(x) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}, \qquad x \in J$$

geht die obige Differentialgleichung über in das System

$$\begin{aligned} y_0' &= y_1 \\ y_1' &= y_2 \\ &\vdots \\ y_{n-2}' &= y_{n-1} \\ y_{n-1}' &= a_0(x)y_0 + \ldots + a_{n-1}(x)\,y_{n-1} + b(x)\,, \end{aligned}$$

oder kürzer, in Matrix–Schreibweise,

$$\underline{y}' = A(x)\underline{y} + \underline{b}(x)$$

mit

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_0(x) & a_1(x) & a_2(x) & \dots & a_{n-1}(x) \end{pmatrix}, \qquad \underline{b}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(x) \end{pmatrix}.$$

Nach unseren früheren Resultaten (§ 4) gibt es zu diesem System und jedem $x_0 \in J$ eine eindeutig bestimmte Lösungsmatrix $Y(\cdot)$, die Lösung des Matrixanfangswertproblems

$$\text{AWP} \qquad Y' = A(x)Y, \qquad Y(x_0) = E.$$

Mit dieser Lösungsmatrix $Y(\cdot)$ ist dann für jedes Anfangswertproblem

$$\text{AWP} \qquad \underline{y'} = A(x)\underline{y} + \underline{b}(x), \quad \underline{y}(x_0) = \underline{y}_0$$

die eindeutig bestimmte Lösung gegeben durch

$$\underline{y}(x) = Y(x)\underline{y}_0 + Y(x)\int_{x_0}^{x} Y(t)^{-1}\underline{b}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Eigentlich interessiert uns jedoch nur $y(\cdot)$, die erste Komponente von $\underline{y}(\cdot)$. Damit erhalten wir zunächst:

Satz 6.1 *Seien* $a_j, b : J \longrightarrow \mathbb{C}$ *stetig,* $x_0 \in J$. *Dann hat das Anfangswertproblem*

$$\text{AWP} \qquad \begin{aligned} & y^{(n)} = a_0(x)y + a_1(x)y' + \ldots + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + b(x), \\ & y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \; \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{aligned}$$

genau eine Lösung.

Wir nennen n Funktionen $z_1, \ldots, z_n : J \longrightarrow \mathbb{C}$ ein ***Fundamentalsystem*** der homogenen Differentialgleichung

$$y^{(n)} = a_0(x)y + a_1(x)y' + \ldots + a_{n-1}(x)y^{(n-1)},$$

wenn sie

(i) die Differentialgleichung lösen, und

(ii) linear unabhängig sind (in $C(J)$, d. h. aus $\sum_{j=1}^{n} c_j z_j(x) \equiv 0$ folgt $c_1 = \ldots = c_n = 0$).

Offensichtlich ist $\{z_1, \ldots, z_n\}$ genau dann ein Fundamentalsystem dieser Gleichung, wenn $\{\underline{z}_1, \ldots, \underline{z}_n\}$ mit

$$\underline{z}_j(x) = \Big(z_j(x),\, z_j'(x), \ldots, z^{(n-1)}(x)\Big)^t$$

ein Fundamentalsystem des homogenen Systems $\underline{y}' = A(x)\underline{y}$ ist.

Da die Spaltenvektoren der Lösungsmatrix $Y(\cdot)$ ein Fundamentalsystem von $\underline{y}' = A(x)\underline{y}$ bilden, bilden also die Funktionen der ersten Zeile von $Y(\cdot)$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung n–ter Ordnung. Und da jede Lösung eines homogenen Systems erster Ordnung Linearkombination der Lösungen eines Fundamentalsystems ist, folgt:

Satz 6.2 *Ist $\{z_1, \ldots, z_n\}$ ein Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung*

$$y^{(n)} = a_0(x)y + \ldots + a_{n-1}(x)y^{(n-1)},$$

so ist jede Lösung dieser Gleichung darstellbar als Linearkombination von $z_1, \ldots, z_n$. — Die Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung n–ter Ordnung bilden also einen n–dimensionalen Vektorraum.

Für $n-1$ mal stetig differenzierbare Funktionen $z_1, \ldots, z_n : J \longrightarrow \mathbb{C}$ ist die ***Wronskideterminante*** definiert durch

$$W(x) = W(z_1, \ldots, z_n; x) := \det \begin{pmatrix} z_1(x) & z_2(x) & \ldots & z_n(x) \\ z_1'(x) & z_2'(x) & \ldots & z_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_1^{(n-1)}(x) & z_2^{(n-1)}(x) & \ldots & z_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

Für diese Wronskideterminante gilt:

Satz 6.3 *Seien* $z_1, \ldots, z_n$ *Lösungen der homogenen Differentialgleichung* n*–ter Ordnung*

$$y^{(n)} = a_0(x)y + \ldots + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} \qquad (x \in J)\,,$$

$W(\cdot)$ *die Wronskideterminante von* $z_1, \ldots, z_n$ *. Dann gilt für alle* $x_0,\, x \in J$

$$W(x) = W(x_0)\exp\Big\{\int\limits_{x_0}^{x} a_{n-1}(s)\,\mathrm{d}s\Big\}\,,$$

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) $\{z_1, \ldots, z_n\}$ *ist ein Fundamentalsystem,*

(ii) $W(x) \neq 0$ *für* **ein** $x \in J$ *,*

(iii) $W(x) \neq 0$ *für* **alle** $x \in J$ *.*

Beweis. Aus der Produktregel ergibt sich, daß die Ableitung einer Determinante gleich der Summe der Determinanten ist, die man erhält, indem man jeweils eine Zeile der Matrix differenziert. Das liefert in diesem Fall

$$W'(x) = \det\begin{pmatrix} z_1(x) & z_2(x) & \ldots & z_n(x) \\ z_1'(x) & z_2'(x) & \ldots & z_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_1^{(n-2)}(x) & z_2^{(n-2)}(x) & \ldots & z_n^{(n-2)}(x) \\ z_1^{(n)}(x) & z_2^{(n)}(x) & \ldots & z_n^{(n)}(x) \end{pmatrix};$$

alle anderen Summanden verschwinden, da die entsprechenden Matrizen jeweils zwei identische Zeilen enthalten. In der letzten Zeile kann man nun auf Grund der Differentialgleichung ersetzen

$$z_j^{(n)}(x) = a_0(x)z_j(x) + a_1(x)z_j'(x) + \ldots + a_{n-1}(x)z_j^{(n-1)}(x)\,.$$

Auf Grund der Linearität (bezüglich der Zeilen) der Determinante ist also die obige Determinante gleich der Summe von n Determinanten, in denen jeweils in der letzten Zeile $z_j^{(n)}(x)$

ersetzt wird durch $a_k(x)z_j^{(k)}(x)$ für $k = 0, \ldots, n-1$; nur die letzte dieser Determinanten ist nicht Null. Damit folgt

$$W'(x) = \det \begin{pmatrix} z_1(x) & \ldots & z_n(x) \\ z_1'(x) & \ldots & z_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ z_1^{(n-2)}(x) & \ldots & z_n^{(n-2)}(x) \\ a_{n-1}(x)z_1^{(n-1)}(x) & \ldots & a_{n-1}(x)z_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} = a_{n-1}(x)W(x)\,.$$

Daraus folgt die behauptete Formel durch Integration. Diese Formel liefert auch die Äquivalenz von (ii) und (iii).

(i) $\Rightarrow$ (ii): Wenn (ii) nicht gilt, gibt es ein $x_0 \in J$ und $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ mit $(c_1, \ldots, c_n) \neq (0, \ldots, 0)$ und $y(x) := \sum_{j=1}^n c_j z_j^{(k)}(x_0) = 0$ für $k = 0, \ldots, n-1$. Dann ist aber $y(\cdot)$ **die** Lösung des homogenen AWP mit Anfangswerten $y(x_0) = y'(x_0) = \ldots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$ und somit $y(x) \equiv 0$. Das heißt aber, daß $\{z_1, \ldots, z_n\}$ linear abhängig ist, im Widerspruch zu (i).

(ii) $\Rightarrow$ (i): Wenn (i) nicht gilt, gibt es $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ mit $(c_1, \ldots, c_n) \neq (0, \ldots, 0)$ und $\sum_{j=1}^n c_j z_j(x) \equiv 0$. Dann ist aber auch $\sum_{j=1}^n c_j z_j^{(k)}(x) \equiv 0$ für alle $k = 0, \ldots, n-1$ und somit $W(x) = 0$ im Widerspruch zu (ii). □

Damit haben wir alle Vorbereitungen, um auch die inhomogene Gleichung zu lösen:

Satz 6.4 *Sei $\{z_1, \ldots, z_n\}$ ein Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung*

$$y^{(n)} = a_0(x)y + \ldots + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}\,,$$

$W(x) = W(z_1, \ldots, z_n; x)$ *die Wronskideterminante,*

$$K(x,t) := \frac{1}{W(t)} \det \begin{pmatrix} z_1(t) & \ldots & z_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ z_1^{(n-2)}(t) & \ldots & z_n^{(n-2)}(t) \\ z_1(x) & \ldots & z_n(x) \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} K(x,t)\, b(t)\, \mathrm{d}t$$

die (eindeutige bestimmte) Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y^{(n)} = a_0(x)y + \ldots + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + b(x)$$

mit den Anfangswerten

$$y(x_0) = y'(x_0) = \ldots = y^{(n-1)}(x_0) = 0\,.$$

Die Lösung zu beliebigen Anfangswerten

$$y(x_0) = y_0, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

erhält man durch Addition der Lösung der homogenen Gleichung (Linearkombination der z_j *), die diese Anfangsbedingungen erfüllt.*

Beweis. Die gesuchte Lösung $y(\cdot)$ ist die erste Komponente der Lösung $\underline{y}(\cdot)$ des zugehörigen Systems:

$$y(x) = \Big(\underline{y}(x)\Big)_1 = \Big(Y(x)\int\limits_{x_0}^{x} Y(t)^{-1}\underline{b}(t)\,\mathrm{d}t\Big)_1;$$

dies ist also zu berechnen.

Sei $Z(x)$ die Matrix mit den Spalten

$$\underline{z}_j(x) = \Big(z_j(x),\, z_j'(x), \ldots, z_j^{(n-1)}(x)\Big)^t.$$

Dann gilt für die Lösungsmatrix $Y(\cdot)$ nach Satz **??**

$$Y(x) = Z(x)\,Z(x_0)^{-1}\,, \qquad Y(x)^{-1} = Z(x_0)Z(x)^{-1}\,,$$

und somit

$$\begin{aligned}\underline{y}(x) &= Z(x)Z(x_0)^{-1}\int\limits_{x_0}^{x} Z(x_0)Z(t)^{-1}\underline{b}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= Z(x)\int\limits_{x_0}^{x} Z(t)^{-1}\underline{b}(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{x_0}^{x} Z(x)Z(t)^{-1}\underline{b}(t)\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

Für den Vektor $Z(t)^{-1}\underline{b}(t)$ gilt nach der Cramer'schen Regel

$$
\begin{aligned}
\Big(Z(t)^{-1}\underline{b}(t)\Big)_j &= \\
&= \frac{1}{W(t)} \det \begin{pmatrix} z_1(t) & \dots & z_{j-1}(t) & 0 & z_{j+1}(t) & \dots & z_n(t) \\ z_1'(t) & \dots & z_{j-1}'(t) & 0 & z_{j+1}'(t) & \dots & z_n'(t) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_1^{(n-2)}(t) & \dots & z_{j-1}^{(n-2)}(t) & 0 & z_{j+1}^{(n-2)}(t) & \dots & z_n^{(n-2)}(t) \\ z_1^{(n-1)}(t) & \dots & z_{j-1}^{(n-1)}(t) & b(t) & z_{j+1}^{(n-1)}(t) & \dots & z_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(mit dem Determinanten–Entwicklungssatz, j–te Spalte)

$$
= (-1)^{n+j} \frac{b(t)}{W(t)} \det \begin{pmatrix} z_1(t) & \dots & z_{j-1}(t) & z_{j+1}(t) & \dots & z_n(t) \\ z_1'(t) & \dots & z_{j-1}'(t) & z_{j+1}'(t) & \dots & z_n'(t) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_1^{(n-2)}(t) & \dots & z_{j-1}^{(n-2)}(t) & z_{j+1}^{(n-2)}(t) & \dots & z_n^{(n-2)}(t) \end{pmatrix} .
$$

Damit folgt, speziell für die erste Komponente

$$
\begin{aligned}
\Big(Z(x)Z(t)^{-1}\underline{b}(t)\Big)_1 &= \sum_{j=1}^n z_j(x) \Big(Z(t)^{-1}\,\underline{b}(t)\Big)_j \\
&= \sum_{j=1}^n z_j(x)(-1)^{n+j} \frac{b(t)}{W(t)} \det \begin{pmatrix} z_1(t) & \dots & z_{j-1}(t) & z_{j+1}(t) & \dots & z_n(t) \\ z_1'(t) & \dots & z_{j-1}'(t) & z_{j+1}'(t) & \dots & z_n'(t) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_1^{(n-2)}(t) & \dots & z_{j-1}^{(n-2)}(t) & z_{j+1}^{(n-2)}(t) & \dots & z_n^{(n-2)}(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(mit erneuter Anwendung des Entwicklungssatzes)

$$
= K(x,t)\, b(t) .
$$

Integration von x_0 bis x liefert die Behauptung. □

6.2 Lineare Differentialgleichungen der Ordnung n mit konstanten Koeffizienten

Im Fall konstanter Koeffizienten ist es relativ leicht, ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung explizit anzugeben. Diese Ergebnisse lassen sich natürlich aus den entsprechenden

Sätzen für Systeme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten ableiten. Es ist aber auch nicht schwer, sie auf direktem Weg zu erhalten:

Mit L bezeichnen wir im folgenden den ***Differentialausdruck***, der definiert ist durch

$$Ly \;=\; y^{(n)} - a_{n-1}y^{(n-1)} - \ldots - a_1y' - a_0y$$

mit Konstanten $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. Wie man einerseits leicht erraten kann, wie andererseits aber aus den Resultaten für Systeme klar ist, sollte der Lösungsansatz

$$y(x) \;=\; e^{\lambda x} \qquad (\textbf{\textit{Exponentialansatz}})$$

zum Ziel führen. Einsetzen dieses Ansatzes in die Differentialgleichung liefert:

$$0 \;=\; L\{e^{\lambda x}\} \;=\; p(\lambda)e^{\lambda x}$$

mit dem ***charakteristischen Polynom***

$$p(\lambda) \;=\; \lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - \ldots - a_1\lambda - a_0\,.$$

Wie man leicht nachrechnet, gilt auch

$$p(\lambda) \;=\; (-1)^{n+1} \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & & & & \\ 0 & -\lambda & 1 & & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\lambda & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & -\lambda \end{pmatrix}$$

Diese Form von $p(\cdot)$ erinnert sehr deutlich an das zur Differentialgleichung n–ter Ordnung äquivalente System erster Ordnung.

Offenbar ist also $y = e^{\lambda x}$ genau dann eine Lösung der Differentialgleichung, wenn λ eine Nullstelle von $p(\cdot)$ ist. Abgesehen davon, daß wir die lineare Unabhängigkeit dieser Lösungen noch nicht bewiesen haben, haben wir damit in dem Fall, in dem $p(\cdot)$ nicht n verschiedene Nullstellen hat, noch nicht genügend viele Lösungen für ein Fundamentalsystem. Die noch fehlenden Lösungen liefert der folgende Satz, in dem wir dann auch die lineare Unabhängigkeit des gesamten Systems beweisen.

Satz 6.5 *Seien* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ *die verschiedenen Nullstellen von* $p(\cdot)$ *mit Vielfachheiten* $\nu_1, \ldots, \nu_k$, $\sum_{j=1}^k \nu_k = n$ *(vgl. Fundamentalsatz der Algebra Satz* **??***). Dann ist ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung* $Ly = 0$ *gegeben durch*

$$e^{\lambda_j x}, \quad x e^{\lambda_j x}, \ldots, \quad x^{\nu_j - 1} e^{\lambda_j x} \qquad \text{für} \quad j = 1, \ldots, k\,.$$

Beweis. a) Wir zeigen zunächst: Wenn λ eine ν–fache Nullstelle von $p(\cdot)$ ist, dann sind

$$e^{\lambda x}, \quad x e^{\lambda x}, \ldots, \quad x^{\nu - 1}\, e^{\lambda x}$$

Lösungen der Differentialgleichung $Ly = 0$. Aus der Gleichung $L(e^{\lambda x}) = p(\lambda) e^{\lambda x}$ folgt durch j–malige Differentiation nach λ (Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge)

$$\begin{aligned} L(x^j e^{\lambda x}) &= L\Big(\frac{\partial^j}{\partial \lambda^j}\, e^{\lambda x}\Big) = \frac{\partial^j}{\partial \lambda^j}\, L(e^{\lambda x}) = \frac{\partial^j}{\partial \lambda^j}\, \{p(\lambda) e^{\lambda x}\} \\ &\qquad\Big(\text{mit} \quad (fg)^{(j)} = \sum_{\ell=0}^{j} \binom{j}{\ell} f^{(\ell)} g^{(j-\ell)}\Big) \\ &= \sum_{\ell=0}^{j} \binom{j}{\ell} p^{(\ell)}(\lambda) x^{j-\ell} e^{\lambda x}\,. \end{aligned}$$

Ist λ_0 eine ν–fache Nullstelle von p, $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^\nu p_0(\lambda)$, so ist

$$p^{(\ell)}(\lambda_0) = 0 \qquad \text{für} \quad \ell = 0, \ldots, \nu - 1\,,$$

und somit

$$L\Big(x^j e^{\lambda_0 x}\Big) = 0 \qquad \text{für} \quad j = 0, \ldots, \nu - 1\,.$$

b) Es bleibt die lineare Unabhängigkeit der im Satz angegebenen Lösungen zu beweisen. Dazu nehmen wir an, daß gilt

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{\ell=1}^{\nu_j} c_{j\ell} x^{\ell-1} e^{\lambda_j x} = 0 \qquad \text{für alle} \quad x\,.$$

Es ist zu zeigen, daß dann alle $c_{j\ell}$ verschwinden.

Wir führen diesen Beweis durch Induktion nach k.

k = 1: Auf Grund der Annahme gilt dann

$$\sum_{\ell=1}^{\nu_1} c_\ell x^{\ell-1} e^{\lambda_1 x} = 0 \qquad \text{für alle} \quad x\,,$$

also

$$\sum_{\ell=1}^{\nu_1} c_\ell x^{\ell-1} = 0 \qquad \text{für alle} \quad x\,.$$

Das ist aber nur möglich , wenn alle c_ℓ verschwinden (da nur das 0–Polynom für alle x verschwindet).

k ⟹ k + 1: Auf Grund der Annahme gilt mit Polynomen $p_j(\cdot)$ vom Grad $< \nu_j$

$$\sum_{j=1}^{k+1} p_j(x) e^{\lambda_j x} = 0 \qquad \text{für alle} \quad x\,.$$

Multiplikation mit $e^{-\lambda_k x}$ liefert

$$\sum_{j=1}^{k} p_j(x) e^{(\lambda_j - \lambda_k)x} = -p_{k+1}(x) \qquad \text{für alle} \quad x\,.$$

Differenziert man diese Gleichung ν_{k+1} mal, so wird die rechte Seite Null, und mit Polynomen $P_j(\cdot)$ vom gleichen Grad wie $p_j(\cdot)$ (wobei das Null–Polynom vereinbarungsgemäß den Grad -1 hat) gilt dann

$$\sum_{j=1}^{k} P_j(x) e^{(\lambda_j - \lambda_k)x} = 0 \qquad \text{für alle} \quad x\,.$$

Die Induktionsannahme (behauptete Aussage für k verschiedene Nullstellen) liefert dann $P_j(\cdot) = 0$ für $j = 1, \ldots, k$. Da die p_j den gleichen Grad wie P_j haben, folgt daraus $p_j(\cdot) = 0$ für $j = 1, \ldots, k$ und mit obiger Gleichung auch $p_{k+1}(\cdot) = 0$. □

Mit Hilfe dieses Fundamentalsystems kann nun also das in 6.1 entwickelte Verfahren zur Lösung eines beliebigen (inhomogenen) Anfangswertproblems eingesetzt werden.

Bemerkung 6.6 Ist die Differentialgleichung (d. h. alle Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{n-1}$) reell, so hat $p(\cdot)$ mit jeder nicht–reellen Nullstelle $\lambda = \sigma + i\tau$ auch die konjugiert komplexe Nullstelle $\overline{\lambda} = \sigma - i\tau$. Die zu diesen Nullstellen gehörigen Lösungen kann man dann auch ersetzen durch Real– und Imaginärteil der oben angegebenen Lösungen:

$$\begin{aligned} \text{Re } x^j e^{(\sigma \pm i\tau)x} &= x^j e^{\sigma x} \cos \tau x \,, \\ \text{Im } x^j e^{(\sigma + i\tau)x} &= -\text{Im } x^j e^{(\sigma - i\tau)x} = x^j e^{\sigma x} \sin \tau x \,. \end{aligned}$$

6.3 Übungsaufgaben

6.1 a) Man bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$xy'' - y' = x^2 \,.$$

Anleitung: Für die homogene Gleichung mache man den Ansatz $y(x) = x^r$.

b) Die Wronskideterminante des Fundamentalsystems verschwindet für $x = 0$. Warum ist dies kein Widerspruch zu dem Satz aus der Vorlesung, nach dem $W(x)$ entweder für alle oder für kein x verschwindet?

6.2 a) Die inhomogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\sum_{j=0}^{n} a_j y^{(j)} = c e^{bx}$$

hat eine Lösung der Form $\mathrm{d} x^k e^{bx}$, falls b eine k–fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist (auch für $k = 0$).

Anleitung: Man benutze $x^k e^{bx} = \dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}b^k} (e^{bx})$.

b) Man löse das Anfangswertproblem

$$y^{(3)} + y'' - y' - y = 9e^{2x} \,,$$

$$y(0) = 1 \,, \quad y'(0) = 0 \,, \quad y''(0) = 0 \,.$$

6.3 a) Man zeige: Die inhomogene Differentialgleichung

$$u'' + \omega_0^2 u = c \sin \omega t \qquad (\omega_0, \omega \in \mathbb{R} \,, \omega_0 \neq 0)$$

hat eine Lösung der Form

(i) $d \sin \omega t$, falls $\omega \neq \omega_0$ ist,

(ii) $d\, t \cos \omega t$, falls $\omega = \omega_0$ ist.

b) Man löse für alle $\omega \in \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem

$$u'' + \omega_0^2 u = c \sin \omega t, \qquad u(0) = 0, \qquad u'(0) = 1\,.$$

6.4 Sei $q : [0,\, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Ist für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ das Randwertproblem (RWP)

$$-u'' + qu = \lambda u, \qquad u(0) = u(1) = 0 \tag{$*$}$$

nichttrivial lösbar, so heißt λ ***Eigenwert*** und u ***Eigenfunktion*** des RWP.

a) Eigenfunktionen u, v zu verschiedenen Eigenwerten λ, μ sind orthogonal, d. h.

$$\int_0^1 \overline{u(x)}\, v(x)\, \mathrm{d}x = 0\,.$$

b) Für $q = 0$ bestimme man alle Eigenwerte und Eigenfunktionen.

6.5 Für das RWP $(*)$ aus Aufgabe **??** zeige man, daß die Eigenwerte keinen endlichen Häufungspunkt haben.

Anleitung: Aus $\lambda_n \longrightarrow \lambda_0$, u_n zugehörige Eigenfunktionen (z. B. mit $u_n'(0) = 1$) folgt $u_n \longrightarrow u_0$ gleichmäßig in $[0, 1]$.

7 Einfache mathematische Modelle der Populations–entwicklung (ein nicht–lineares System)

Im folgenden beschreibe $y(t)$ die ***Stärke einer Population*** zur Zeit t. Um eine Behandlung mit Mitteln der Analysis zu ermöglichen, ist es nicht sinnvoll, die Stärke der Population durch die Anzahl zu beschreiben, da dies eine Sprungfunktion wäre. Man könnte etwa daran denken, ihr Gewicht in Kg zu messen. Oder aber man geht davon aus, daß es sich um eine sehr große Zahl handelt, wo dann die Sprünge relativ sehr klein sind. Idealisiert nehmen wir jedenfalls im folgenden an, daß $y(\cdot)$ stetig differenzierbar ist.

7.1 Beschreibung durch eine nicht–lineare Differentialgleichung

Als einfachstes Modell betrachten wir zunächst das des ***ungehinderten Wachstums*** unter ***gleichbleibenden Bedingungen***. Das soll heißen, daß das relative Wachstum (Zunahme pro vorhandener Einheit) konstant ist,

$$\frac{y'}{y} = a \quad \text{bzw.} \quad y' = ay \qquad (a \in \mathbb{R})\,.$$

Für $a > 0$ haben wir Wachstum, für $a < 0$ Abnahme (dabei ist zu beachten, daß für ein Populationsmodell natürlich nur $y(\cdot)$ mit $y(t) \geq 0$ interessant sind).

Bekanntlich hat diese Gleichung die Lösung

$$y(t) = y_0 \, e^{at}\,,$$

wobei $y_0 = y(0)$ die Stärke der Population zur Zeit 0 ist (entsprechend erhalten wir $y(t) = y(t_0)\exp\{a(t-t_0)\}$). Wir haben für

— $a > 0$ exponentielles Wachstum,

— $a < 0$ exponentiellen Abfall (Aussterben).

Beides, insbesondere aber das exponentielle Wachstum, ist nicht besonders wirklichkeitsnah; man denke etwa an Nahrungsmangel, Rohstoffmangel, Raummangel und dergleichen.

Vielmehr ist es plausibel, daß das Wachstum kleiner wird (eventuell sogar negativ), wenn die Population zu groß wird. Wir machen also einen zweiten Ansatz, indem wir in der obigen Differentialgleichung den Faktor a ersetzen durch $a - by$ mit $a > 0, b > 0$:

$$y' = (a - by)y\,.$$

Es ist also für

— $0 < y < \dfrac{a}{b} := y^*$ die Population wachsend,

— $y^* < y$ die Population abnehmend

(für $y < 0$, was allerdings in unserem Modell nicht sinnvoll ist, ist y ebenfalls fallend). Schließlich sei noch angemerkt, daß $y(t) \equiv 0$ und $y(t) \equiv y^*$ Lösungen sind.

Es ist nicht schwer, für beliebige Anfangswerte das zu dieser Gleichung gehörige Anfangswertproblem zu lösen: Wir erhalten für

— $y_0 = 0$ die konstante Lösung $y(t) = 0$,

— $y_0 = y^*$ die konstante Lösung $y(t) = y^*$.

Ist $y_0 \neq 0$ und $y_0 \neq y^*$, so gilt, so lange $y(t) \neq 0$ und $y(t) \neq y^*$ ist, nach Division der Differentialgleichung durch die rechte Seite

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{y'}{(a-by)y} = \frac{y^*}{a}\,\frac{y'}{(y^*-y)y} = \frac{1}{a}\left(\frac{y'}{y^*-y} + \frac{y'}{y}\right), \\ a &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big\{\ln|y| - \ln|y^*-y|\Big\} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\left|\frac{y}{y^*-y}\right|, \\ \left|\frac{y}{y^*-y}\right| &= c'e^{at} \qquad (\text{mit } c' \neq 0)\,. \end{aligned}$$

Ist $y(y^*-y)^{-1} \gtrless 0$ für ein t, so gilt dies also (da es nicht Null wird) für alle t in dem Intervall, in dem obige Identität gilt. Bei geeigneter Wahl von c' können also die Betragsstriche weggelassen werden:

$$\begin{aligned} y &= (y^*-y)c'e^{at}\,, \\ y(t) &= \frac{y^*c'e^{at}}{1+c'e^{at}} = \frac{y^*}{1+e^{-at}/c'} = \frac{y^*}{1+ce^{-at}}\,. \end{aligned}$$

Offensichtlich wird $y(t)$ nie 0 oder y^*; deshalb gilt die Rechnung für alle t, für die $y(t)$ sinnvoll ist. Die Konstante $c = 1/c'$ ist so zu wählen, daß der Anfangswert angenommen wird, z. B.

$$y(0) = y_0 , \quad \text{d. h.} \quad y_0 = \frac{y^*}{1+c} , \quad c = \frac{y^*}{y_0} - 1 .$$

Offensichtlich gibt es für jedes $y_0 \neq 0$ (auch für $y_0 < 0$) ein $c \in \mathbb{R}$ so, daß das Anfangswertproblem durch obiges $y(\cdot)$ gelöst wird (dies gilt übrigens auch für $y_0 = y^*$).

y

$y_0 > y^*$

y^*

$0 < y_0 < y^*$

t_1 t_2 t

$y_0 < 0$

Lösungen von $\mathbf{y' = (a - by)y}$

Wir haben

— $c \geq 0$ für $0 < y_0 \leq y^*$,

— $-1 < c < 0$ für $y_0 > y^*$.

Für $y_0 > 0$ haben wir also stets $c > -1$ und somit $1 + ce^{-at} \neq 0$ für alle $t \geq 0$, d. h. die ***Lösung existiert für alle*** $\mathbf{t \geq 0}$. Sie konvergiert für $t \longrightarrow \infty$ exponentiell schnell

— wachsend gegen y^*, falls $y_0 < y^*$,

— fallend gegen y^* , falls $y_0 > y^*$.

Für $0 < y_0 < y^*$ ist $c > 0$ und somit $1 + ce^{-at} \neq 0$ für **alle** t , d. h. die Lösung existiert für alle $t \in \mathbb{R}$. Ist $y_0 > y^*$, also $-1 < c < 0$, so existiert ein $t_1 < 0$ mit $1 + ce^{-at_1} = 0$, über das hinaus die Lösung also nicht nach links fortsetzbar ist. (Ist $y_0 < 0$, was hier eigentlich nicht interessiert, so ist $c < -1$; es existiert dann ein $t_2 > 0$ mit $1 + ce^{-at_2} \neq 0$, über das hinaus die Lösung nicht nach rechts fortsetzbar ist.)

Die Erfahrung zeigt, daß das nach obigem Modell erwartete asymptotisch konstante Verhalten der Population in Wirklichkeit meist nicht auftritt. Es sind eher gewisse Zyklen zu erwarten. Ein solches Verhalten wird sich in dem Modell des folgenden Abschnitts ergeben.

7.2 Das Volterra–Lotka–System (Räuber–Beute–Modell), Integrale autonomer Systeme

Zur besseren Erfassung tatsächlicher Verhältnisse führen wir eine zweite Population $z(\cdot)$ ein, von der wir uns etwa vorstellen wollen, daß sie der Population $y(\cdot)$ als Nahrung (Beute) dient. Mit $a, b, c, d > 0$ betrachten wir das System

$$\begin{aligned} y' &= (az - b)y \,, \\ z' &= (c - \mathrm{d}y)z \,. \end{aligned}$$

Dieses System ist also so gewählt, daß

— das relative Wachstum y'/y der Popolation y

 * groß wird, wenn der Nahrungsvorrat z groß ist,
 * klein, oder sogar negativ, wenn der Nahrungsvorrat klein ist,

— das relative Wachstum z'/z des Nahrungsvorrats

 * groß wird, wenn die Population y' klein ist (z. B. auch für $y = 0$),
 * klein, oder sogar negativ, wenn die Population y groß ist.

Es sei noch bemerkt, daß die rechte Seite dieses Systems offensichtlich eine lokale Lipschitzbedingung erfüllt (sie ist stetig differenzierbar). Daraus folgt, daß jedes Anfangswertproblem zumindest lokal eindeutig lösbar ist. Nicht geklärt ist damit zunächst die Frage, ob die Lösung auf alle $t \geq 0$ oder $t \in \mathbb{R}$ fortsetzbar ist. (Da die Lösung erst dann endet, wenn sie den

„Rand“ des Gebietes erreicht, auf dem die rechte Seite definiert ist, können allerdings nur dann Probleme auftreten, wenn die Lösung für endliche Zeiten unbeschränkt wird.)

Wir interessieren uns (natürlich) im folgenden nur für Anfangswerte $y_0 \geq 0, z_0 \geq 0$. Einige Spezialfälle sind trivial lösbar:

(i) $y_0 = y^* := \dfrac{c}{d}, \quad z_0 = z^* := \dfrac{b}{a}$: Dann ist

$$y(t) = y^*, \quad z(t) = z^* \qquad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R}.$$

(ii) $y_0 = 0, z_0 = 0$: Dann ist

$$y(t) = 0, \quad z(t) = 0 \qquad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R}.$$

(iii) $y_0 > 0, z_0 = 0$: Dann ist

$$y(t) = y_0\, e^{-bt}, \quad z(t) = 0 \qquad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R}.$$

(iv) $y_0 = 0, z_0 > 0$: Dann ist

$$y(t) = 0, \quad z(t) = z_0\, e^{ct} \qquad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Die verbleibenden Fälle sind nicht explizit lösbar. Es wird allerdings möglich sein, sehr präzise qualitative Aussagen über die Lösungen zu machen. Insbesondere werden für die zur Diskussion stehenden Anfangswerte alle Anfangswertprobleme für alle $t \in \mathbb{R}$ lösbar sein.

Wir beweisen zunächst ein abstraktes Resultat: Ein Differentialgleichungssystem $y' = f(y)$, in dem also die unabhängige Variable nicht explizit vorkommt, heißt ein ***autonomes System***. In dem autonomen System $y' = f(y)$ sei f auf $D \subset \mathbb{R}^m$ definiert, $\Omega \subset D$ offen. Eine Funktion $F \in C^1(\Omega)$ heißt ein ***Integral*** des Systems, wenn für jede Lösung y des Systems, für die alle Werte $y(t)$ in Ω liegen, gilt

$$F(y(t)) \qquad \text{ist konstant}.$$

Die Lösungskurven $t \mapsto y(t)$ liegen also jeweils in geeigneten Niveauflächen (bzw. in Niveaulinien) von Integralen. Bei einem System mit 2 Gleichungen (d. h. y hat Werte in $\mathbb{R}^2$) wird also in der Regel ein Integral ausreichen, um den Verlauf der Lösungskurve in $\mathbb{R}^2$ zu beschreiben; wobei allerdings damit die Abhängigkeit von t noch nicht beschrieben ist; genau das werden wir später getrennt untersuchen müssen. (Bei einem System mit m Gleichungen [d. h. y hat Werte in $\mathbb{R}^m$] wird man dementsprechend $m-1$ Integrale brauchen, um die Lösungskurven als Schnitte der Niveauflächen zu erhalten.)

Satz 7.1 *Eine Funktion* $F \in C^1(\Omega)$ *ist genau dann ein Integral des Systems* $y' = f(y)$, *wenn gilt*

$$\sum_{j=1}^{m} F_j(z) f_j(z) = 0 \qquad \text{für alle} \quad z \in \Omega\,,$$

wobei F_j *die partielle Ableiung von* F *nach der* j*–ten Variablen ist,* f_j *die* j*–te Komponente von* f.

Beweis. $\Longrightarrow$: Sei F ein Integral, $z \in \Omega$, $y(\cdot)$ eine Lösung des

$$\text{AWP} \qquad y' = f(y), \quad y(0) = z \qquad \text{im Intervall} \quad (-\alpha, \alpha)\,.$$

Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$y(t) \in \Omega \qquad \text{für} \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon)\,.$$

Da F ein Integral ist und y die Gleichung $y' = f(y)$ löst, gilt

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(y(t)) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial y_j} F(y(t))\, y_j'(t) = \sum_{j=1}^{m} F_j(y(t))\, f_j(y(t))\,.$$

Für $t = 0$ folgt hieraus die Behauptung.

$\Longleftarrow$: Für alle $z \in \Omega$ gelte $\sum_{j=1}^{m} F_j(z) f_j(z) = 0$. Ist y eine Lösung der Gleichung $y' = f(y)$ mit Werten in Ω, so gilt für alle t (für die $y(t)$ definiert ist)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(y(t)) = \sum_{j=1}^{m} F_j(y(t))\, f_j(y(t)) = 0\,,$$

d. h. $F(y(\cdot))$ ist konstant, F ein Integral. $\square$

Wir wollen nun diese Überlegungen auf das Volterra–Lotka–System (das offenbar autonom ist) anwenden. Wir haben in diesem Fall

$$\begin{aligned} y' &= f_1(y,z) := (az-b)y\,, \\ z' &= f_2(y,z) := (c-dy)z\,, \end{aligned} \qquad \Omega = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2,\ y>0, z>0\}\,.$$

(Da die Fälle $y=0$ und $z=0$ bereits erledigt sind, können wir in Ω die Punkte mit $y=0$ oder $z=0$ ausschließen.) Auf Grund des eben bewiesenen Satzes ist F genau dann ein Integral, wenn gilt

$$\frac{\partial}{\partial y} F(y,z)\,(az-b)y + \frac{\partial}{\partial z} F(y,z)\,(c-dy)z = 0\,.$$

Wegen $y \neq 0,\ z \neq 0$ ist dies äquivalent zu

$$\frac{\partial}{\partial y} F(y,z)\left(a - \frac{b}{z}\right) + \frac{\partial}{\partial z} F(y,z)\left(\frac{c}{y} - d\right) = 0\,.$$

Diese Gleichung gilt genau dann, wenn gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} F(y,z) &= C\Big(\frac{c}{y} - d\Big)\,, \\ \frac{\partial}{\partial z} F(y,z) &= -C\Big(a - \frac{b}{z}\Big)\,, \end{aligned} \qquad \text{mit einem} \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Da die Rotation des Vektorfeldes $(y,z) \mapsto C\Big(\dfrac{c}{y} - d,\ -a + \dfrac{b}{z}\Big)$ offenbar verschwindet, besitzt es ein Potential; dieses ist dann ein Integral F des Differentialgleichungssystems, z. B.

$$\begin{aligned} F(y,z) &= C \int_{(1,1)}^{(y,z)} \Big(\frac{c}{y} - d\Big)\,\mathrm{d}y + \Big(-a + \frac{b}{z}\Big)\,\mathrm{d}z \\ &= C\Big\{c \ln y - dy - az + b \ln z\Big\}\,. \end{aligned}$$

Da es im folgenden darum geht, Niveaulinien von F zu untersuchen, spielt natürlich der Faktor C keine Rolle; wir lassen ihn deshalb weg.

Da die Lösungskurven $\Big\{(y(t),\, z(t))\ :\ t \in \mathbb{R}\Big\}$ in den Niveaulinien von F enthalten sind, ist es nützlich, zunächst F genauer zu untersuchen.

Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial y} F(y,z) \quad = \quad \frac{c}{y} - d \begin{cases} > 0 & \text{für } y < y^* = \dfrac{c}{d}\,, \\ = 0 & \text{für } y = y^*\,, \\ < 0 & \text{für } y > y^*\,, \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} F(y,z) \quad = \quad \frac{b}{z} - a \begin{cases} > 0 & \text{für } z < z^* = \dfrac{b}{a}\,, \\ = 0 & \text{für } z = z^*\,, \\ < 0 & \text{für } z > z^*\,. \end{cases}$$

Hieraus folgt

— F hat ein Maximum bei $(y^*, z^*) = \Big(\dfrac{c}{d}\,,\ \dfrac{b}{a}\Big)$,

— für jedes $y > 0$ hat $F(y,\cdot)$ bei z^* ein Maximum und strebt gegen $-\infty$ für $z \longrightarrow 0$ und für $z \longrightarrow \infty$,

— für jedes $z > 0$ hat $F(\cdot, z)$ bei y^* ein Maximum und strebt gegen $-\infty$ für $y \longrightarrow 0$ und für $y \longrightarrow \infty$.

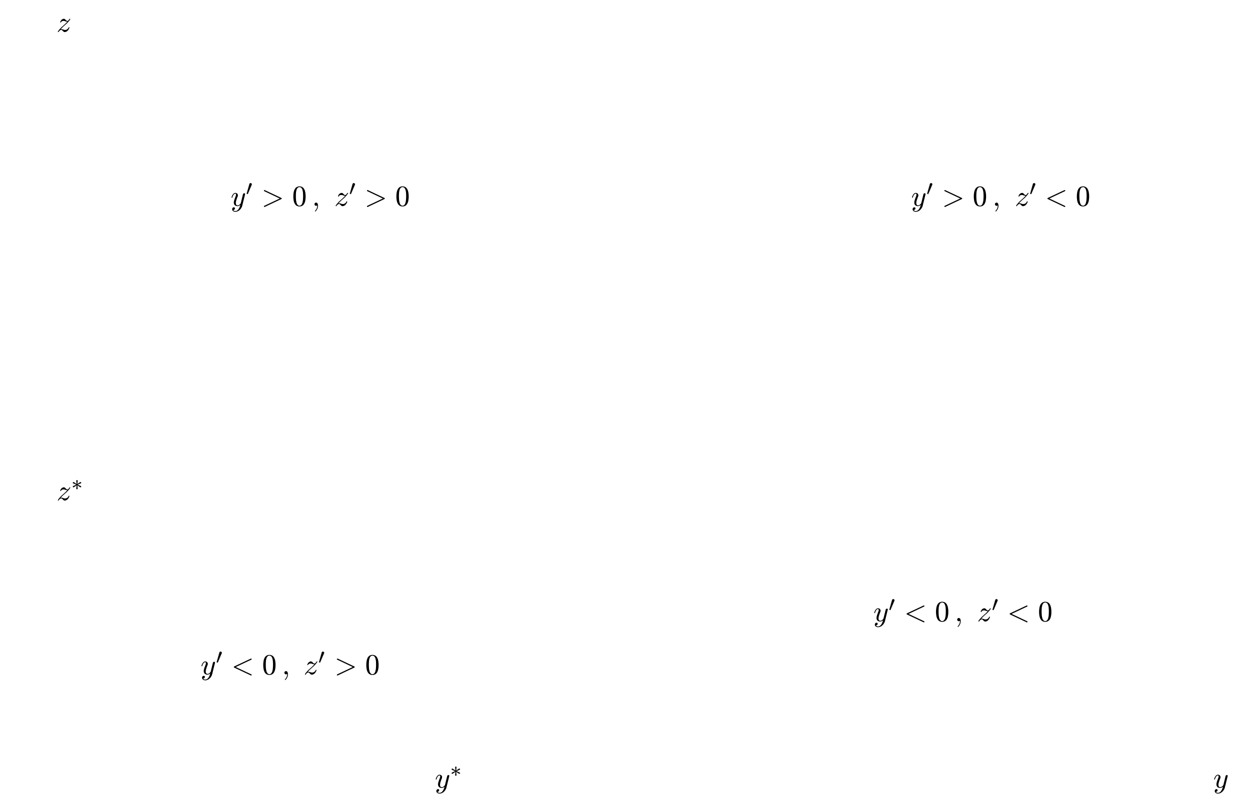
Die Niveaulinien von $F(\cdot,\cdot)$ sehen also so aus, wie es im folgenden Bild gezeigt wird: Werte $\lambda > F(y^*, z^*)$ werden von F nicht angenommen. Für $\lambda = F(y^*, z^*)$ ist (y^*, z^*) der einzige Punkt, in dem F den Wert λ annimmt; das entspricht der konstanten Lösung $y(t) = y^*$, $z(t) = z^*$. Für jedes $\lambda < F(y^*, z^*)$ sei

$$A_\lambda := \Big\{(y,z) \in \Omega\ :\ F(y,z) = \lambda\Big\};$$

A_λ ist eine kompakte Teilmenge von Ω, eine einfach geschlossene Kurve (vgl. Bild).

Für jeden Anfangswert $(y_0, z_0) \in \Omega$ sei $\lambda_0 := F(y_0, z_0)$. Die Lösung mit diesem Anfangswert bleibt für alle t, für die sie definiert ist, in A_{λ_0}. Sie wird also nicht unbeschränkt und ist deshalb für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert.

Für $(y_0, z_0) \neq (y^*, z^*)$ ist $\lambda_0 = F(y_0, z_0) < F(y^*, z^*)$ und somit A_{λ_0} eine glatte geschlossene Kurve (Satz über implizite Funktionen). Die Funktion $(y(t), z(t))$ durchläuft Punkte dieser Kurve. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems dieses



Lösungsschar des Volterra–Lotka–Systems

(autonomen) Systems kann der Umlaufsinn nicht geändert werden. Unklar ist aber zunächst trotzdem noch, ob die ganze Kurve durchlaufen wird (gegebenenfalls sogar mehrfach). Da der Umlaufsinn sich nicht ändern kann, gilt aber auf jeden Fall für jeden Anfangswert (y_0, z_0) entweder

(α) es gibt ein kleinstes $t_1 > 0$ mit $(y(t_1), z(t_1)) = (y_0, z_0)$, oder

(β) $(y(t), z(t)) \longrightarrow (y_\infty, z_\infty) \in A_{\lambda_0}$ für $t \longrightarrow \infty$.

Um zu entscheiden, welcher Fall wirklich auftritt, beweisen wir zunächst noch ein abstraktes Resultat über autonome Systeme.

Satz 7.2 *Ist y eine für alle $t \geq 0$ definierte Lösung des autonomen Systems $y' = f(y)$ mit $y(t) \longrightarrow y_\infty$ für $t \longrightarrow \infty$, so gilt $f(y_\infty) = 0$.*

Beweis. Wir nehmen an, daß $f(y_\infty) \neq 0$ gilt. Dann existiert ein $j \in \{1, \ldots, m\}$ mit $f_j(y_\infty) \neq 0$, und somit existieren $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ mit

$$|f_j(y)| \geq \delta \qquad \text{für} \quad |y - y_\infty| < \varepsilon\,.$$

Wegen $y(t) \longrightarrow y_\infty$ für $t \longrightarrow \infty$ existiert also ein $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $|y(t) - y_\infty| < \varepsilon$ für $t \geq t_0$, und somit

$$|f_j(y(t))| \geq \delta \qquad \text{für} \quad t \geq t_0 \,.$$

Mit Hilfe des Mittelwertsatzes erhalten wir daraus für alle $t \geq t_0$ und $s > 0$

$$\begin{aligned} 2\varepsilon \;&\geq\; \Big| y_j(t+s) - y_j(t) \Big| \;=\; s \Big| y_j'(t + \vartheta s) \Big| \\ &=\; s \Big| f_j(y(t + \vartheta s)) \Big| \;\geq\; s\delta \,. \end{aligned}$$

Für hinreichend große s ist dies ein Widerspruch. □

Korollar 7.3 *In der obigen Alternative für das Volterra–Lotka-System tritt nur der Fall* (α) *ein, d. h. das Volterra–Lotka–System hat für Anfangswerte* $(y_0, z_0) \in \Omega \backslash (y^*, z^*)$ *nur periodische Lösungen (die Periode ist durch das* t_1 *aus* (α) *gegeben).*

Beweis. Wegen

$$\begin{aligned} \Big(f_1(y,z),\, f_2(y,z) \Big) \;&=\; \Big((az - b)y \,,\, (c - \mathrm{d}y)z \Big) \\ &\neq\; (0,0) \qquad \text{für} \quad (y,z) \in \Omega \backslash (y^*, z^*) \,, \end{aligned}$$

kann auf Grund des eben bewiesenen Satzes der Fall (β) nicht auftreten. Da zum Zeitpunkt $t = t_1$ wieder der gleiche Wert angenommen wird wie zum Zeitpunkt $t = 0$, ist klar, daß der Prozeß periodisch weiterläuft (Autonomie des Systems). □

8 Der Existenzsatz von Peano

In Abschnitt 3 haben wir gesehen, daß für ein Differentialgleichungssystem $y' = f(x,y)$, in dem f eine lokale Lipschitzbedingung bezüglich y erfüllt, jedes Anfangswertproblem in einer Umgebung des Anfangspunktes eindeutig lösbar ist. Hier beweisen wir nun, daß für ein solches System mit lediglich stetigem f jedes Anfangswertproblem in einer Umgebung des Anfangspunktes lösbar ist; wie wir schon an Beispielen gesehen haben (vgl. Beispiele **??** und **??**), kann unter diesen Umständen die Eindeutigkeit nicht garantiert werden. Der folgende Abschnitt dient der Vorbereitung.

8.1 Der Satz von Arzela–Ascoli

Der Satz von Arzela–Ascoli, den wir hier beweisen wollen, dient uns als Hilfsmittel beim Beweis des Existenzsatzes von Peano. Er ist darüberhinaus einer der grundlegenden Sätze der Analysis. In der Funktionalanalysis ist er die Basis zahlreicher Kompaktheitskriterien in Funktionsräumen (auch die Grundlage des folgenden Beweises des Satzes von Peano ist in Wirklichkeit ein Kompaktheitsargument).

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ (oder $\mathbb{C}^m$), $M \subset C(\Omega)$. Die Funktionen $f \in M$ (bzw. die Menge M) heißen ***gleichgradig stetig***, wenn gilt

$$\begin{aligned}&\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ so, daß } \forall x, x' \in \Omega \text{ mit } |x - x'| < \delta \\ &\text{und } \forall f \in M \text{ gilt } |f(x) - f(x')| < \varepsilon .\end{aligned}$$

(Insbesondere ist dann jedes einzelne $f \in M$ gleich**mäßig** stetig.) Wir sagen M ist ***beschränkt***, wenn ein $C \geq 0$ existiert mit $|f(x)| \leq C$ für alle $x \in \Omega$ und $f \in M$.

Satz 8.1 (Satz von Arzela–Ascoli) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ (oder $\mathbb{C}^m$) kompakt, (f_n) eine Folge aus $C(\Omega)$ so, daß $M = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig stetig und beschränkt ist. Dann gibt es eine Teilfolge von (f_n), die gleichmäßig konvergiert.*

Beweis. Sei $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Menge in Ω, die in Ω dicht ist (d. h. zu jedem $x \in \Omega$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $i = i(x, \varepsilon)$ mit $|x - x_i| < \varepsilon$). Der Beweis besteht aus zwei Schritten:

(i) Es gibt eine Teilfolge (g_k) von (f_n) so, daß für jedes $i \in \mathbb{N}$ die Folge $(g_k(x_i))_{k \in \mathbb{N}}$ konvergent ist.

Zum Beweis verwenden wir das ***Diagonalfolgenverfahren***: Die Folge $(f_n(x_1))$ ist in $\mathbb{C}$ beschränkt. Es gibt also eine Teilfolge $(f_{1,n})$ von (f_n), für die $(f_{1,n}(x_1))$ konvergiert. Die Folge $(f_{1,n}(x_2))$ ist wieder beschränkt in $\mathbb{C}$. Es gibt also eine Teilfolge $(f_{2,n})$ von $(f_{1,n})$, für die $(f_{2,n}(x_2))$ konvergiert, usw. So erhält man sukzessive Teilfolgen $(f_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$, für die $(f_{k,n}(x_k))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, wobei $(f_{k+1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils eine Teilfolge von $(f_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Natürlich ist $(f_{k,n}(x_i))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent für alle $i \le k$.

Die ***Diagonalfolge*** $(g_k) = (f_{k,k})$ ist für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ bis auf endlich viele Anfangsglieder eine Teilfolge von $(f_{\ell,n})_{n\in\mathbb{N}}$, d. h. $(g_k(x_i))_{k\in\mathbb{N}}$ ist für jedes i konvergent. Damit ist (i) bewiesen.

(ii) Die in (i) konstruierte Teilfolge (g_k) ist gleichmäßig konvergent.

Hierzu ist zu beweisen:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ so, daß } \forall k, \ell \ge N \text{ und } \forall x \in \Omega \text{ gilt } |g_k(x) - g_\ell(x)| < \varepsilon .$$

Zu vorgegebenen $\varepsilon > 0$ sei $\delta = \delta(\varepsilon/3)$ gemäß der Definition der gleichgradigen Stetigkeit gewählt. Die kompakte Menge Ω läßt sich durch endlich viele Kugeln K_p $(p = 1, \dots, N_0)$ mit Durchmesser $< \delta$ überdecken. Für jedes $p \in \{1, \dots, N_0\}$ gibt es ein i_p mit $x_{i_p} \in K_p$. Da die Folgen $(g_k(x_{i_p}))_{k\in\mathbb{N}}$ für alle $p = 1, \dots, N_0$ konvergieren, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so, daß gilt

$$\forall k, \ell \ge N \text{ und } \forall p \in \{1, \dots, N_0\} \text{ gilt } \left|g_k(x_{i_p}) - g_\ell(x_{i_p})\right| < \frac{\varepsilon}{3} .$$

Ist $x \in \Omega$ beliebig, so gibt es ein $p = p(x) \in \{1, \dots, N_0\}$ mit $x \in K_p$; also gilt (auf Grund der oben getroffenen Wahl von δ) für $k, \ell \ge N$

$$\begin{aligned} |g_k(x) - g_\ell(x)| &\le \left|g_k(x) - g_k(x_{i_p})\right| + \left|g_k(x_{i_p}) - g_\ell(x_{i_p})\right| + \left|g_\ell(x_{i_p}) - g_\ell(x)\right| \\ &\le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon . \end{aligned}$$

Das ist die gleichmäßige Konvergenz der Folge (g_k). □

8.2 Der Existenzsatz von Peano

Satz 8.2 (Existenzsatz von Peano) *Sei* $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^m$ *offen,* $f : G \longrightarrow \mathbb{C}^m$ *stetig,* $(x_0, y_0) \in G$ *. Dann existiert ein* $\alpha > 0$ *so, daß das Anfangswertproblem*

$$\text{AWP} \qquad y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

in $J = [x_0 - \alpha,\, x_0 + \alpha]$ *lösbar ist. Eine Abschätzung für die Größe von* α *ergibt sich aus dem Beweis. (Über die Eindeutigkeit kann im allgemeinen nichts gesagt werden; das zeigt z. B. das früher behandelte* AWP $y' = |y|^{1/2}$ *mit* $y(x_0) = 0$ *).*

Beweis. Wir wählen ein „Rechteck“ R in $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^m$,

$$R := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^m \,:\, |x - x_0| < \alpha_1 \,,\, |y - y_0| \le \alpha_2\Big\} \subset G\,,$$

und setzen f auf den „Streifen“

$$S := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^m \,:\, |x - x_0| < \alpha_1\Big\}$$

stetig und beschränkt fort, z. B. durch

$$\hat{f}(x,y) := \begin{cases} f(x,y) & \text{für } (x,y) \in R\,, \\ f(x, y_0 + \alpha_2 e) & \text{für } (x,y) = (x, y_0 + ce) \text{ mit } (x,y_0) \in R \text{ und } c > \alpha_2\,, \end{cases}$$

wobei e ein beliebiger Einheitsvektor in $\mathbb{C}^m$ ist; d. h. $\hat{f}(x,\cdot)$ ist außerhalb $|y - y_0| \le \alpha_2$ konstant auf Strahlen die von y_0 ausgehen. Offenbar ist

> $\hat{f}$ stetig, und es gilt: $|\hat{f}(x,y)| \le C := \max\Big\{|f(x,y)| : (x,y) \in R\Big\}$ für alle $(x,y) \in S$.

Für jedes $\beta > 0$ definieren wir $y_\beta : (-\infty, x_0 + \alpha_1] \longrightarrow \mathbb{C}^m$ durch

$$y_\beta(x) := \begin{cases} y_0 & \text{für } x \le x_0\,, \\ y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \hat{f}(t, y_\beta(t - \beta))\,\mathrm{d}t & \text{für } x_0 < x \le x_0 + \alpha_1\,. \end{cases}$$

Diese Funktion ist tatsächlich induktiv wohldefiniert, denn: um y_β auf $(x_0, x_0 + \beta]$ zu berechnen, werden nur die Werte von y_β für $t \le x_0$ benötigt; diese sind vorgegeben. Um y_β auf $(x_0 + k\beta, x_0 + (k+1)\beta]$ zu berechnen, werden nur die Werte von y_β für $t \le x_0 + k\beta$ benötigt; diese sind im vorherigen Schritt berechnet worden.

Die Funktionenmenge $\{y_\beta : \beta > 0\}$ ist beschränkt,

$$|y_\beta(x)| \;\le\; |y_0| + \alpha_1 C\,,$$

und gleichgradig stetig, denn es gilt

$$|y'_\beta(x)| \le C\,, \quad \text{also} \quad |y_\beta(x) - y_\beta(x')| \le C|x - x'|\,,$$

d. h. in der Definition der gleichgradigen Stetigkeit kann $\delta(\varepsilon) := \dfrac{\varepsilon}{C}$ gewählt werden. Nach dem Satz von Arzela–Ascoli enthält also die Folge $(y_{1/n})$ (als Funktionen auf $[x_0, x_0 + \alpha_1]$) eine gleichmäßig konvergente Teilfolge (y_{β_n}), d. h. es existiert eine stetige Funktion $y : [x_0, x_0 + \alpha_1] \longrightarrow \mathbb{C}$ mit

$$y_{\beta_n}(x) \longrightarrow y(x) \qquad \text{gleichmäßig für} \quad n \longrightarrow \infty\,.$$

Wegen

$$\begin{aligned}
&\Big|y_{\beta_n}(x - \beta_n) - y(x)\Big| \\
&\quad\le\; \Big|y_{\beta_n}(x - \beta_n) - y_{\beta_n}(x)\Big| + \Big|y_{\beta_n}(x) - y(x)\Big| \\
&\quad\le\; \beta_n C + \Big|y_{\beta_n}(x) - y(x)\Big|
\end{aligned}$$

gilt dann auch

$$y_{\beta_n}(x - \beta_n) \longrightarrow y(x) \qquad \text{gleichmäßig auf} \quad [x_0, x_0 + \alpha_1]\,.$$

In der Definition von y_{β_n},

$$y_{\beta_n}(x) = \begin{cases} y_0 & \text{für } x \le x_0\,, \\ y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \hat f(t, y_{\beta_n}(t - \beta_n))\,\mathrm{d}t & \text{für } x_0 < x \le x_0 + \alpha_1 \end{cases}$$

kann also der Grenzübergang $n \longrightarrow \infty$ ausgeführt werden:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \hat{f}(t, y(t))\,dt \qquad \text{für} \quad x_0 \le x \le x_0 + \alpha_1\,,$$

d. h. y ist Lösung des

$$\text{AWP} \qquad y' = \hat{f}(x,y), \quad y(x_0) = y_0 \quad \text{im Intervall} \quad [x_0, x_0 + \alpha_1]\,.$$

Für $|x - x_0| \le \alpha := \min\left\{\alpha_1, \frac{\alpha_2}{C}\right\}$ gilt

$$\Big|y(x) - y_0\Big| \le \Big|\int_{x_0}^{x} \hat{f}(t, y(t))\,dt\Big| \le C|x - x_0| \le C\alpha \le \alpha_2\,,$$

d. h. es gilt

$$\hat{f}(x, y(x)) = f(x, y(x)) \qquad \text{für} \quad |x - x_0| \le \alpha\,.$$

Somit löst y das vorgegebene Anfangswertproblem in $[x_0, x_0 + \alpha]$. Entsprechend findet man ein Stück der Lösung links von x_0. □

Bemerkung 8.3 Für das früher behandelte Anfangswertproblem

$$\text{AWP} \qquad y' = |y|^{1/2}, \qquad y(x_0) = 0\,,$$

das bekanntlich nicht eindeutig lösbar ist, liefert das Verfahren des obigen Beweises offenbar

$$y_\beta(x) = 0 \qquad \text{für alle} \quad x \ge x_0\,, \beta > 0\,,$$

und somit die Lösung $y(x) \equiv 0$.

Bemerkung 8.4 Man könnte auch versucht sein, zur Konstruktion einer Lösung im Fall des Satzes von Peano wieder die Picard'sche Iteration zu verwenden. Tatsächlich erhielte man (zumindest in einem kleinen Intervall) eine beschränkte und gleichgradig stetige Folge (y_n), die also eine gleichmäßig konvergente Teilfolge (y_{n_k}) enthält. Aber in

$$y_{n_k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n_k}(t))\,dt$$

kann man nicht zur Grenze übergehen.

8.3 Übungsaufgaben

8.1 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Folge von Funktionen, deren Einschränkungen auf jede kompakte Teilmenge von Ω gleichgradig stetig sind. Dann existiert eine Teilfolge von (f_n), die auf jeder kompakten Teilmenge von Ω gleichmäßig konvergiert.
Anleitung: Diagonalfolgenverfahren.

Teil II

Funktionentheorie

9 Komplexe Zahlen, einfache komplexe Funktionen

9.1 Komplexe Zahlen

Wir erinnern zunächst an die Einführung der komplexen Zahlen im Rahmen der „Analysis I“. Die ***komplexen Zahlen*** wurden definiert als die Menge der Paare reeller Zahlen $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ versehen mit den Operationen

Addition: $\quad (x_1, y_1) + (x_2, y_2) \;=\; (x_1 + x_2,\, y_1 + y_2)\,,$

Multiplikation: $\quad (x_1, y_1)\,(x_2, y_2) \;=\; (x_1 x_2 - y_1 y_2,\, x_1 y_2 + x_2 y_1)\,.$

Die Addition ist also gerade die Vektoraddition in $\mathbb{R}^2$; die Multiplikation ist dagegen eine neue Operation in $\mathbb{R}^2$.

Es ist leicht zu zeigen (nur an wenigen Stellen ist etwas Rechnung nötig), daß $\mathbb{C}$ mit diesen Operationen ein Körper ist:

I $(\mathbb{C}, +)$ ist eine ***abelsche Gruppe***:

(1) Es gilt das ***Assoziativgesetz***:

$$\Big((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\Big) + (x_3, y_3) \;=\; (x_1, y_1) + \Big((x_2, y_2) + (x_3, y_3)\Big)\,,$$

(2) es gibt ein eindeutig bestimmtes ***Nullelement*** (Neutrales Element bezüglich der Addition) $0 = (0, 0)$:

$$(x, y) + (0, 0) \;=\; (x, y)\,,$$

(3) zu jedem $(x, y) \in \mathbb{C}$ gibt es ein eindeutig bestimmtes ***negatives Element*** (inverses Element bezüglich der Addition) $-(x, y) \;=\; (-x, -y)$:

$$(x, y) + (-x, -y) \;=\; (0, 0) \;=\; 0\,,$$

(4) es gilt das ***Kommutativgesetz***:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_2, y_2) + (x_1, y_1) .$$

II Es gelten die folgenden Gesetze der Multplikation:

(1) das ***Assoziativgesetz***

$$\Big((x_1, y_1)(x_2, y_2)\Big)(x_3, y_3) = (x_1, y_1)\Big((x_2, y_2)(x_3, x_3)\Big) ,$$

(2) es gibt ein eindeutig bestimmtes ***Einselement*** (neutrales Element bezüglich der Multiplikation) $1 = (1, 0)$:

$$(x, y)\,(1, 0) = (x, y) ,$$

(3) zu jedem $(x, y) \neq 0$ gibt es ein eindeutig bestimmtes ***inverses Element*** (bezüglich der Multiplikation) $(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}\right)$:

$$(x, y)\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = (1, 0) = 1 ,$$

(4) es gilt das ***Kommutativgesetz***:

$$(x_1, y_1)\,(x_2, y_2) = (x_2, y_2)\,(x_1, y_1) .$$

III Es gilt das ***Distributivgesetz***:

$$(x_1, y_1)\Big((x_2, y_2) + (x_3, y_3)\Big) = (x_1, y_1)\,(x_2, y_2) + (x_1, y_1)\,(x_3, y_3) .$$

Betrachtet man nur Elemente der Form $(x, 0)$, so erkennt man, daß die beschriebenen Operationen nicht aus dieser Menge herausführen und die Operationen genau denen in $\mathbb{R}$ entsprechen:

$$(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0) , \qquad (x, 0)\,(y, 0) = (xy, 0) .$$

Wir können also $\mathbb{R}$ als ***Unterkörper*** von $\mathbb{C}$ auffassen, indem wir $x \in \mathbb{R}$ identifizieren mit $(x, 0) \in \mathbb{C}$.

Mit dieser Konstruktion wurde insbesondere erreicht, daß -1 eine (sogar zwei) Quadratwurzeln hat, denn es gilt

$$(0, \pm 1)^2 = (-1, 0) = -1 .$$

Entsprechend hat jede negative Zahl a die zwei Quadratwurzeln $(0, \pm\sqrt{-a})$, wobei für $b > 0$ mit $\sqrt{b}$ die positive Quadratwurzel gemeint ist.

Es ist üblich, $x + iy$ für (x, y) zu schreiben. Mit solchen Ausdrücken kann wie mit reellen Zahlen gerechnet werden, wenn man beachtet, daß $i^2 = (0,1)^2 = (-1,0) = -1$ gilt.

Für $z = x + iy$ wird definiert:

— ***Realteil*** von z: $\quad \mathrm{Re}\, z := x$,

— ***Imaginärteil*** von z: $\quad \mathrm{Im}\, z := y$ (**nicht** iy),

— die zu z ***konjugiert komplexe Zahl***:

$$\overline{z} := x - iy \qquad (= \mathrm{Re}\, z - i\, \mathrm{Im}\, z).$$

Die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z}$ wird gelegentlich auch mit z^* bezeichnet. In der Darstellung von $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}^2$ erhält man $\overline{z}$ durch Spiegelung an der x–Achse (reelle Achse). Offenbar gilt

$$\mathrm{Re}\, \overline{z} = \mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \quad \mathrm{Im}\, z = -\mathrm{Im}\, \overline{z} = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}).$$

Der ***Betrag*** $|z|$ einer komplexen Zahl $z = x + iy$ ist definiert als die euklidische Länge des entsprechenden Vektors in $\mathbb{R}^2$:

$$|z| = |x + iy|^2 := (x^2 + y^2)^{1/2} = (z\overline{z})^{1/2}$$

(für reelle Zahlen ist dies der aus „Analysis I“ bekannte Betrag). Es gilt insbesondere

$$|z| = |\overline{z}|,$$

$$|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0,$$

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|,$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \qquad (\textbf{\textit{Dreiecksungleichung}}),$$

$$\Big|\, |z_1| - |z_2| \,\Big| \leq |z_1 - z_2|,$$

$$z^{-1} = (z\overline{z})^{-1}\overline{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \qquad \text{für} \quad z \neq 0 \quad (\text{vgl. oben II (3)}).$$

Mit Hilfe des Betrages wird in $\mathbb{C}$ eine ***Konvergenz*** erklärt: Eine Folge $(z_n) = (x_n + iy_n)$ aus $\mathbb{C}$ ***konvergiert*** gegen ein $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $z_n \longrightarrow z$, wenn gilt $|z - z_n| \longrightarrow 0$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $x_n \longrightarrow x$ und $y_n \longrightarrow y$ gilt. Die Folge (z_n) heißt eine ***Cauchy–Folge***, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq n_0 \qquad |z_n - z_m| < \varepsilon .$$

Dies gilt offenbar ganau dann, wenn (x_n) und (y_n) Cauchy–Folgen in $\mathbb{R}$ sind. Wie für $\mathbb{R}^2$ zeigt man, daß $\mathbb{C}$ ***vollständig*** ist, d. h. daß jede Cauchy–Folge konvergiert. Wie in $\mathbb{R}$ zeigt man: Aus $z_n \longrightarrow z$ und $w_n \longrightarrow w$ folgt für alle $a, b \in \mathbb{C}$

$$az_n + bw_n \longrightarrow az + bw\,, \qquad z_n w_n \longrightarrow zw\,,$$

$$\frac{z_n}{w_n} \longrightarrow \frac{z}{w} \qquad \text{(falls } \ w \neq 0 \text{ gilt).}$$

Die ***Konvergenz*** und die ***absolute Konvergenz*** einer Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ wird wie in $\mathbb{R}$ definiert; insbesondere folgt wieder aus der absoluten Konvergenz die Konvergenz.

Wie in $\mathbb{R}$ zeigt man (mit Hilfe des Quotientenkriteriums), daß die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergiert. Man kann also die (***komplexe***) ***Exponentialfunktion*** definieren durch

$$\exp\,:\,\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \exp(z) = e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C}\,.$$

Dies ist offenbar eine Fortsetzung der (reellen) Exponentialfunktion auf ganz $\mathbb{C}$; sie erfüllt weiterhin die Funktionalgleichung

$$\exp(z_1 + z_2) \;=\; \exp(z_1)\exp(z_2)\,.$$

Außerdem gilt (vgl. „Analysis I")

$$\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)} \qquad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C}\,,$$

$$|\exp(iy)| = 1 \qquad \text{für alle} \quad y \in \mathbb{R}\,,$$

$$\exp(z) = e^x(\cos y + i \sin y) \qquad \text{für alle} \quad z = x + iy \in \mathbb{C}\,,$$

$$\cos y = \operatorname{Re} e^{iy} = \frac{1}{2}\,(e^{iy} + e^{-iy})\,,$$

$$\sin y = \operatorname{Im} e^{iy} = \frac{1}{2i}\,(e^{iy} - e^{-iy})\,.$$

Da e^{iy} die Zahl vom Betrag 1 ist, die auf der Einheitskreislinie mit der positiven reellen Achse den Winkel (im Bogenmaß) $y \mod 2\pi$ bildet, läßt sich jede von Null verschiedene komplexe Zahl in ***Polarkoordinaten*** schreiben in der Form

$$z = |z|\, e^{i\varphi}\,,$$

wobei φ als ***Argument*** von z (kurz: $\arg z$) bezeichnet wird; $\arg(z)$ ist natürlich nur bis auf Vielfache von 2π eindeutig bestimmt. Für $z_1 = |z_1|\, e^{i\varphi_1}$, $z_2 = |z_2|\, e^{i\varphi_2}$ gilt

$$z_1 z_2 = |z_1 z_2|\, e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}\,,$$

d. h. bei der Multiplikation komplexer Zahlen werden die Beträge miteinander multipliziert, die Argumente werden addiert. Hieraus folgt nun sehr einfach:

> Jede von 0 verschiedene komplexe Zahl $w = |w|\, e^{i\varphi}$ hat genau n verschiedene n–te Wurzeln
>
> $$z_j = \sqrt[n]{|w|}\, \exp\left\{i\,\frac{1}{n}\,(\varphi + 2k\pi)\right\} \qquad (k = 0, \ldots, n-1)\,.$$

Diese Aussage besagt, daß das Polynom $p(z) = z^n - w$ für jedes $w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ genau n verschiedene Nullstellen hat; für $w = 0$ hat dieses p nur die einzige Nullstelle 0, allerdings mit Vielfachheit n. Später werden wir zeigen: Jedes Polynom vom Grad n mit komplexen Koeffizienten hat genau n Nullstellen, wenn diese mit Vielfachheit gezählt werden.

Abschließend seien noch die Abbildungseigenschaften der Exponentialfunktion beschrieben, wie sie sich aus obigen Überlegungen ergeben:

— exp ist periodisch mit Periode $2\pi i$, d. h. man kennt exp vollständig, wenn man es auf dem Streifen $S = \Big\{ z = x + iy \, : \, x \in \mathbb{R}, -\pi < y \leq \pi \Big\}$ kennt.

— Die Strecke $M_x = \Big\{ z = x + iy \, : \, -\pi < y \leq \pi \Big\}$ geht über in die Kreislinie um 0 mit Radius e^x; läuft y von $-\pi$ nach π, so wird diese von der reellen Zahl $-e^x$ aus in positiver Richtung genau einmal durchlaufen.

— Die Gerade $N_y = \Big\{ z = x + iy : x \in \mathbb{R} \Big\}$ wird abgebildet auf den von 0 ausgehenden Halbstrahl mit Richtung e^{iy}.

— Die Abbildung $\exp \, : \, S \longrightarrow \mathbb{C} \backslash \{0\}$ ist bijektiv. Die Umkehrabbildung wird als (Hauptwert des) ***Logarithmus*** bezeichnet:

$$\ln : \mathbb{C} \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \ln z \; = \; \ln |z| + i \arg(z) \, .$$

9.2 Gebrochen lineare Funktionen, Möbiustransformationen

Ziel dieses Abschnittes ist es, Abbildungen der Form

$$f(z) \; = \; \frac{az+b}{cz+d} \qquad \text{mit} \quad \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$$

genau zu studieren (ist $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0$, so ist f offenbar konstant, also nicht weiter interessant). Dazu sind i. wes. zwei Typen von Funktionen zu untersuchen:

$$f(z) \; = \; az + b \quad (\text{mit} \quad a \neq 0) \qquad \text{und} \qquad f(z) \; = \; \frac{1}{z} \, .$$

Beispiel 9.1 ***Affine Funktion*** $f(z) = az + b$ mit $a \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$. Diese Funktion hat die folgende Wirkung:

(i) Drehung um $\varphi = \arg(a)$ in positive Richtung (d. h. in negativer Richtung, falls $\arg(a) < 0$ ist),

(ii) Streckung mit dem Faktor $|a|$ (wobei wir auch im Falle eines Faktors a mit $|a| < 1$, wenn es sich eigentlich um eine Stauchung handelt, von einer Streckung reden),

(iii) Translation um b.

Diese Funktion ist (wegen $a \neq 0$) invertierbar und die Inverse

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{a}\,w - \frac{b}{a}$$

ist selbst wieder affin.

Es ist leicht zu sehen, daß eine affine Funktion Geraden in $\mathbb{C}$ auf Geraden abbildet und Kreise auf Kreise. Nur zur zweiten Aussage sei der Beweis angedeutet: Der Kreis um $z_0 = x_0 + iy_0$ mit Radius $r > 0$ kann dargestellt werden in der Form

$$K(z_0, r) = \Big\{ z \in \mathbb{C} \,:\, |z - z_0| = r \Big\}.$$

Er geht unter f über in

$$\begin{aligned} f(K(z_0, r)) &= \Big\{ w = az + b : z \in \mathbb{C},\ |z - z_0| = r \Big\} \\ &= \Big\{ w \in \mathbb{C} : \Big| \Big(\frac{1}{a}\,w - \frac{b}{a} \Big) - z_0 \Big| = r \Big\} \\ &= \Big\{ w \in \mathbb{C} : \Big| w - (b + az_0) \Big| = |a|\,r \Big\} \end{aligned}$$

das ist der Kreis um $b + az_0$ mit Radius $|a|\,r$. #

Beispiel 9.2 $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $f(z) = \dfrac{1}{z}$. Diese Abbildung ist offensichtlich bijektiv, aber leider nicht auf ganz $\mathbb{C}$ definiert und der Wertebereich ist ebenfalls nicht ganz $\mathbb{C}$. Es liegt deshalb nahe, $\mathbb{C}$ durch einen weiteren Punkt $\infty =$ „***Unendlich***" zu erweitern,

$$\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \qquad \textbf{\textit{erweiterte Zahlenebene}},$$

und f fortzusetzen durch

$$\tilde{f} : \tilde{\mathbb{C}} \longrightarrow \tilde{\mathbb{C}}\,, \quad \tilde{f}(z) = \begin{cases} 1/z & \text{für } z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}\,, \\ \infty & \text{für } z = 0\,, \\ 0 & \text{für } z = \infty\,. \end{cases}$$

Offensichtlich ist $\tilde{f}$ bijektiv. Wir schreiben im folgenden häufig einfach $\dfrac{1}{0}$ und $\dfrac{1}{\infty}$.

Bei der ***stereographischen Projektion*** wird die erweiterte Zahlenebene bijektiv auf die ***Riemannsche Zahlenkugel*** abgebildet. Dazu denkt man sich um den Nullpunkt der komplexen Ebene eine Sphäre mit Radius 1 gelegt. Verbindet man einen Punkt $z \in \mathbb{C}$ mit dem Nordpol N der Sphäre, so ist der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Sphäre die ***Projektion*** $P(z)$ auf die Sphäre. Jeder Punkt der Sphäre außer dem Nordpol ist Projektion eines Punktes $z \in \mathbb{C}$. Den Nordpol N ordnet man dem Punkt $\infty \in \tilde{\mathbb{C}}$ zu. Man hat damit eine bijektive Abbildung von $\tilde{\mathbb{C}}$ auf diese Sphäre, die als Riemannsche Zahlenkugel bezeichnet wird.

N

$P(z_2)$

z_1 0 z_2 $\mathbb{C}$

$P(z_1)$

Stereographische Projektion

Die stereographische Projektion und ihre Umkehrung sind gegeben durch

$$P(z) = \begin{cases} (|z|^2+1)^{-1}\Big(2\,\mathrm{Re}\, z,\, 2\,\mathrm{Im}\, z,\, |z|^2-1\Big) & \text{für } z \in \mathbb{C}\,, \\ N = (0,0,1) & \text{für } z = \infty\,, \end{cases}$$

$$P^{-1}(x) = \begin{cases} (1-\xi_3)^{-1}(\xi_1 + i\xi_2) & \text{für } x \neq N\,, \\ \infty & \text{für } x = N\,. \end{cases}$$

Offensichtlich entsprechen Umgebungen eines Punktes $z \in \mathbb{C}$ auch Umgebungen von $P(z)$ auf der Sphäre. Umgebungen von N auf der Sphäre entsprechen den Außenbereichen von beschränkten Mengen in $\mathbb{C}$, die man deshalb als Umgebungen von ∞ in $\tilde{\mathbb{C}}$ betrachtet. In diesem Sinne ist $\tilde{\mathbb{C}}$ äquivalent zur Zahlenkugel, und stetige Funktionen auf der Zahlenkugel entsprechen stetigen Funktionen auf $\mathbb{C}$, für die $\lim\limits_{|z|\to\infty} f(z) =: f(\infty)$ existiert (die man als stetige Funktionen auf $\tilde{\mathbb{C}}$ bezeichnet). Man kann zeigen: Kreise auf der Zahlenkugel, diese werden beschrieben durch

$$K(a,p):\Big\{x\in\mathbb{R}^3:(a,x)=p,\,|x|=1\Big\},\quad a\in\mathbb{R}^3,\quad |a|=1,\quad -1<p<1\,,$$

entsprechen bei der stereographischen Projektion den Kreisen und Geraden in $\mathbb{C}$. Deshalb bezeichnen wir im folgenden die ***Kreise und Geraden*** in $\mathbb{C}$ zusammenfassend als „***Kreise***“ in $\mathbb{C}$ (man kann die Geraden als Kreise durch ∞ auffassen; ihre Bilder auf der Zahlenkugel sind die Kreise durch N).

Satz 9.3 *Die oben definierte Funktion*

$$\tilde f:\tilde{\mathbb{C}}\longrightarrow\tilde{\mathbb{C}},\qquad \tilde f(z)\;=\;\begin{cases}1/z & \textit{für } z\in\mathbb{C}\backslash\{0\}\,,\\ \infty & \textit{für } z=0\,,\\ 0 & \textit{für } z=\infty\end{cases}$$

bildet „Kreise“ auf „Kreise“ ab. Genauer:

— *Geraden durch Null gehen über in Geraden durch Null,*

— *Geraden, die nicht durch Null gehen, gehen über in Kreise durch Null*

— *Kreise durch Null gehen über in Geraden, die nicht durch Null gehen,*

— *Kreise die nicht durch Null gehen, gehen über in Kreise, die nicht durch Null gehen.*

Beweis. Wir zeigen zunächst: „Kreise“ sind genau die durch

$$M\;=\;\Big\{z=x+iy:\,\alpha(x^2+y^2)+\beta x+\gamma y+\delta=0\Big\}\quad\text{mit}\quad\frac{\beta^2}{4}+\frac{\gamma^2}{4}-\alpha\delta>0$$

beschriebenen Mengen (Kreise für $\alpha\neq 0$, Geraden für $\alpha=0$).

Für $\alpha=0$ und $(\beta,\gamma)\neq(0,0)$ ist die Bedingung $\beta^2/4+\gamma^2/4-\alpha\delta>0$ stets erfüllt und man erhält auf diese Weise **alle** Geraden.

Für $\alpha\neq 0$ formen wir um:

$$M\;=\;\Big\{z=x+iy:\,\Big(x+\frac{\beta}{2\alpha}\Big)^2+\Big(y+\frac{\gamma}{2\alpha}\Big)^2\;=\;\frac{\beta^2}{4\alpha^2}+\frac{\gamma^2}{4\alpha^2}-\frac{\delta}{\alpha}\Big\}.$$

Dies sind die Kreise um $z_0 = (x_0, y_0) = (-\dfrac{\beta}{2\alpha}\,, -\dfrac{\gamma}{2\alpha})$ mit Radius $\beta^2/4\alpha^2 + \gamma^2/4\alpha^2 - \delta/\alpha$; dieser Radius ist wegen $\alpha \neq 0$ genau dann positiv, wenn die Bedingung $\beta^2/4+\gamma^2/4-\alpha\delta > 0$ erfüllt ist. Man erhält auf diese Weise **alle** Kreise in $\mathbb{C}$.

Nun könen wir $f(M)$ berechnen (die kritischen Punkte 0 und ∞ können wir hierbei außer Betracht lassen)

$$\begin{aligned}
f(M) &= \left\{w \in \mathbb{C} : \frac{1}{w} \in M\right\} \\
&= \left\{w = u + iv : \alpha\left(\frac{u^2}{(u^2+v^2)^2} + \frac{v^2}{(u^2+v^2)^2}\right) + \beta\,\frac{u}{u^2+v^2} + \gamma\,\frac{-v}{u^2+v^2} + \delta \,=\, 0\right\} \\
&= \left\{w = u + iv : \alpha\frac{1}{u^2+v^2} + \beta\frac{u}{u^2+v^2} - \gamma\frac{v}{u^2+v^2} + \delta \,=\, 0\right\} \\
&= \left\{w = u + iv : \delta(u^2+v^2) + \beta u - \gamma v + \alpha \,=\, 0\right\}.
\end{aligned}$$

Abgesehen davon, daß die Rollen von α und δ vertauscht sind, und γ durch $-\gamma$ ersetzt wurde, hat damit $f(M)$ die gleiche Gestalt wie M. Da außerdem die Bedingung

$$\frac{\beta^2}{4} + \frac{(-\gamma)^2}{4} - \delta\alpha \,=\, \frac{\beta^2}{4} + \frac{\gamma^2}{4} - \alpha\delta > 0$$

erfüllt ist, ist $f(M)$ wieder ein „Kreis“.

Es bleiben die speziellen Abbildungseigenschaften zu beweisen.

$\alpha \neq \mathbf{0}$: M ist also in jedem Fall ein (echter) Kreis.

$\delta \neq 0$: M geht nicht durch 0; $f(M)$ ist Kreis, der nicht durch 0 geht (hat M den Mittelpunkt 0, so gilt dies auch für $f(M)$ $[\beta = \gamma = 0]$).

$\delta = 0$: M geht durch 0; $f(M)$ ist Gerade, die nicht durch 0 geht.

$\alpha = \mathbf{0}$: M ist also in jedem Fall eine Gerade.

$\delta \neq 0$: M geht nicht durch 0; $f(M)$ ist Kreis, der durch 0 geht.

$\delta = 0$: M geht durch 0; $f(M)$ ist ebenfalls Gerade durch 0. □ #

Wir sind nun in der Lage, den allgemeinen Fall einer gebrochen linearen Funktion (***Möbiustransformation***)

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad \text{mit} \quad \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$$

zu untersuchen.

Ist $c = 0$, so ist wegen der Determinantenbedingung notwendig $a \neq 0$ und $d \neq 0$ d. h.

$$f(z) = \frac{a}{d}\,z + \frac{b}{d}$$

ist affin.

Ist $c \neq 0$, so gilt (für $z \neq -\frac{d}{c}$ und $z \neq \infty$)

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{c}\,(cz+d) + b - \frac{a}{c}\,d}{cz+d} \\ &= \frac{a}{c} + \frac{1}{c}\,\frac{bc-ad}{cz+d} = f_3 \circ f_2 \circ f_1(z) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} f_1(z) &= cz+d \qquad \text{(affin)}, \\ f_2(z) &= \frac{1}{z}, \\ f_3(z) &= \frac{bc-ad}{c}\,z + \frac{a}{c} \quad \text{(affin)}. \end{aligned}$$

Für $z = -\frac{d}{c}$ bzw. $z = \infty$: erhält man

$$\begin{aligned} f(-\tfrac{d}{c}) &= f_3 \circ f_2 \circ f_1(-\tfrac{d}{c}) = f_3 \circ f_2(0) = f_3(\infty) = \infty, \\ f(\infty) &= f_3 \circ f_2 \circ f_1(\infty) = f_3 \circ f_2(\infty) = f_3(0) = \frac{a}{c}. \end{aligned}$$

Diese Werte erhält man auch als Grenzwerte

$$\lim_{z \to -d/c} f(z) \quad \text{bzw.} \quad \lim_{z \to \infty} f(z).$$

Wir haben damit gezeigt:

Satz 9.4 *Für jede Matrix* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *mit* $\det A \neq 0$ *ist die gebrochen lineare Abbildung (**Möbiustransformation**)*

$$f_A(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{für} \quad z \in \mathbb{C}\backslash\Big\{-\frac{d}{c}\Big\}, \qquad f\Big(-\frac{d}{c}\Big) = \infty\,, \qquad f(\infty) = \frac{a}{c}$$

eine bijektive Abbildung von $\tilde{\mathbb{C}}$ *auf sich, die „Kreise“ auf „Kreise“ abbildet.*

Satz 9.5 *Für zwei Matrizen* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ *mit* $\det A \neq 0$ *und* $\det B \neq 0$ *gilt*

$$f_{AB} = f_A \circ f_B\,.$$

Speziell gilt $f_E = \mathrm{id}$, $f_{A^{-1}} = (f_A)^{-1}$.

Beweis. Für $z \neq -\frac{\delta}{\gamma}$ und $z \neq f_B^{-1}\Big(-\frac{d}{c}\Big) = -\frac{c\beta+d\delta}{c\alpha+d\gamma}$ gilt

$$f_A \circ f_B(z) = \frac{a\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}+b}{c\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}+d} = \frac{(a\alpha+b\gamma)z+(a\beta+b\delta)}{(c\alpha+d\gamma)z+(c\beta+d\delta)} = f_{AB}(z)\,.$$

Weiter gilt für die Ausnahmepunkte

$$\begin{aligned} f_A \circ f_B\Big(-\frac{\delta}{\gamma}\Big) &= f_A(\infty) = \frac{a}{c} = f_{AB}\Big(-\frac{\delta}{\gamma}\Big)\,, \\ f_A \circ f_B\left(f_B^{-1}\Big(-\frac{d}{c}\Big)\right) &= f_A\Big(-\frac{d}{c}\Big) = \infty = f_{AB}\left(-\frac{c\beta+d\delta}{c\alpha+d\gamma}\right) \\ &= f_{AB}\left(f_B^{-1}\Big(-\frac{d}{c}\Big)\right)\,. \end{aligned}$$

□

9.3 Übungsaufgaben

9.1 a) Man zeige: Jede von der identischen Abbildung verschiedene Möbiustransformation $f : \tilde{\mathbb{C}} \longrightarrow \tilde{\mathbb{C}}$ hat einen oder zwei Fixpunkte in $\tilde{\mathbb{C}}$.

b) Man gebe Beispiele an mit

i) nur einem Fixpunkt: $z_1 = \infty$; $z_1 = 0$; $z_1 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$,

ii) zwei Fixpunkten: $z_1 = 0,\ z_2 = \infty$; $z_1 \in \mathbb{C},\ z_2 = \infty$; $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

9.2 a) Für je drei verschiedene Punkte z_1, z_2, z_3 und $w_1, w_2, w_3 \in \tilde{\mathbb{C}}$ existiert genau eine Möbiustransformation f mit $f(z_i) = w_i$ für $i = 1, 2, 3$.
Anleitung: Man betrachte zunächst den Fall mit $z_j, w_j \in \mathbb{C},\ z_1 = w_1 = 0$.

b) Man bestimme die Möbiustransformation, die $-i, 0, i$ in $-i, i, 1$ überführt.

9.3 Man konstruiere eine Möbiustransformation, die das Innere des Einheitskreises auf die Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > \text{Re } z + 2\}$ und den Punkt $z = -i$ auf ∞ abbildet.

9.4 Man zeige

a) Die stereographische Projektion $P : \mathbb{C} \longrightarrow S^2$ und ihre Inverse sind gegeben durch

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{1}{|z|^2 + 1}\Big(2\,\text{Re } z,\ 2\,\text{Im } z,\ |z|^2 - 1\Big),$$

$$z = \frac{\xi_1 + i\xi_2}{1 - \xi_3}.$$

b) Die Kreise auf S^2 sind gegeben durch

$$K(a, p) := \{x \in \mathbb{R}^3 : (a, x) = p,\ |x| = 1\}$$

mit $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$, $|a| = 1, -1 < p < 1$. Ein Kreis $K(a, p)$ geht genau dann durch N, wenn $p = \alpha_3$ gilt.

9.5 Kreise und Geraden in $\mathbb{C}$ entsprechen bei stereographischer Projektion den Kreisen auf S^2. Dabei entsprechen die Geraden den Kreisen durch N.
Anleitung: Man benutze Aufgabe **??** und die Beschreibung von „Kreisen“aus Abschnitt 9.2.

9.6 Sei $P := \{p^2 + q^2\,;\, p, q \in \mathbb{N}_0\}$. Sind $r, s \in P$, so ist auch $r\,s \in P$.
(Mit einiger Phantasie läßt sich vielleicht erraten, mit welchen Zahlen p und q die Gleichung $r\,s = p^2 + q^2$ gilt. Viel einfacher geht es aber, wenn man sich durch das Rechnen mit komplexen Zahlen inspirieren läßt.)

10 Holomorphe Funktionen

10.1 Stetigkeit und Grenzwerte

Eine Umgebung eines Punktes $z_0 \in \mathbb{C}$ ist eine Menge, die eine volle Kreisscheibe um z_0

$$K(z_0, \varrho) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varrho\} \qquad (\varrho > 0)$$

enthält. Im folgenden nennen wir U eine Umgebung von ∞, wenn U das Komplement eines Kreises (einen „Kreis um ∞“) enthält,

$$U \supset K(\infty, \varrho) = \left\{z \in \tilde{\mathbb{C}} : |z| > \frac{1}{\varrho} \quad \text{bzw.} \quad z = \infty\right\}.$$

Ein $z \in \tilde{\mathbb{C}}$ heißt ***Berührungspunkt*** einer Menge $\Omega \subset \tilde{\mathbb{C}}$, wenn eine Folge (z_n) aus $\tilde{\mathbb{C}}$ existiert mit $z_n \longrightarrow z$; dabei ist $z_n \longrightarrow \infty$ gleichbedeutend mit $|z_n| \longrightarrow \infty$. Jeder Punkt von Ω ist natürlich Berührungspunkt von Ω. z ist genau dann Berührungspunkt, wenn jede Umgebung von z mindestens einen Punkt von Ω enthält; ist ein Berührungspunkt z nicht selbst in Ω, so ist z Häufungspunkt von Ω, d. h. es gibt eine Folge (z_n) aus Ω, $z_n \neq z$ mit $z_n \longrightarrow z$. Eine Folge (z_n) aus $\mathbb{C}$ konvergiert gegen $z \in \mathbb{C}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0 gibt mit $z_n \in K(z, \varepsilon)$ für alle $n \geq n_0$; entsprechend konvergiert (z_n) gegen ∞, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0 gibt mit $z_n \in K(\infty, \varepsilon)$ für $n \geq n_0$, d. h. $|z_n| > \frac{1}{\varepsilon}$ für $n \geq n_0$, oder in anderen Worten $|z_n| \longrightarrow \infty$.

Sei $\Omega \subset \tilde{\mathbb{C}}$, $f : \Omega \longrightarrow \tilde{\mathbb{C}}$, z_0 Berührungspunkt von Ω. Man sagt, f hat den Grenzwert w bei z_0, wenn für jede Folge (z_n) aus Ω mit $z_n \longrightarrow z$ gilt

$$w = \lim_{n\to\infty} f(z_n) \qquad (\, f(z_n) \longrightarrow w \quad \text{für} \quad n \longrightarrow \infty\,).$$

Dies ist äquivalent zu

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall z \in K(z_0, \delta) \qquad f(z) \in K(w, \varepsilon).$$

Deshalb schreibt man dafür auch

$$w = \lim_{z \to z_0} f(z) \qquad \text{oder} \qquad f(z) \longrightarrow w \quad \text{für} \quad z \longrightarrow z_0.$$

Sei $\Omega \subset \tilde{\mathbb{C}}$, $f : \Omega \longrightarrow \tilde{\mathbb{C}}$. f heißt ***stetig bei*** einem $z_0 \in \Omega$, wenn gilt

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

f heißt ***stetig***, wenn es in jedem Punkt von Ω stetig ist.

Beispiel 10.1 Die oben betrachtete Funktion

$$\tilde{f} : \tilde{\mathbb{C}} \longrightarrow \tilde{\mathbb{C}}, \quad f(z) = \begin{cases} 1/z & \text{für } z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, \\ \infty & \text{für } z = 0, \\ 0 & \text{für } z = \infty \end{cases}$$

ist offenbar stetig auf ganz $\tilde{\mathbb{C}}$. #

Beispiel 10.2 Jede gebrochen rationale Funktion

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad \text{mit} \quad \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$$

(wobei stets stillschweigend vereinbart ist, $f(-d/c) = \infty$, $f(\infty) = a/c$) ist ebenfalls auf ganz $\tilde{\mathbb{C}}$ stetig. #

Beispiel 10.3 Jedes Polynom $f(z) = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j z^j$ vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$ $(a_j \in \mathbb{C}, a_n \neq 0)$ ist stetig auf $\tilde{\mathbb{C}}$; dabei setzt man $f(\infty) = a_0$ für $n = 0$ und $f(\infty) = \infty$ für $n > 0$, denn offensichtlich gilt $f(z) \longrightarrow a_0$ bzw. ∞ für $z \longrightarrow \infty$. #

Beispiel 10.4 Jede rationale Funktion $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ mit Polynomen $p(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ und $q(z) = \sum_{j=0}^{m} b_j z^j$ ist zunächst stetig auf $\Omega_q = \{z \in \mathbb{C} : q(z) \neq 0\}$. Sie kann leicht auf die Punkte mit $q(z) = 0$ und $p(z) \neq 0$ stetig fortgesetzt werden, indem man sie dort $= \infty$ setzt. Aber auch in den gemeinsamen Nullstellen von p und q existiert der Grenzwert (wenn man ∞ zuläßt). Für $z = \infty$ definiert man

$$f(\infty) = \begin{cases} \infty & \text{falls } n > m, \\ 0 & \text{falls } n < m, \\ a_n/b_n & \text{falls } n = m. \end{cases}$$

Damit ist dann f auf ganz $\tilde{\mathbb{C}}$ stetig. #

Beispiel 10.5 Die Exponentialfunktion ist stetig auf $\mathbb{C}$; das erkennt man z. B. an

$$\exp(z) = \exp(x+iy) = e^x(\cos y + i\sin y)\,,$$

da $\exp_{\mathbb{R}}$, $\cos_{\mathbb{R}}$ und $\sin_{\mathbb{R}}$ stetig sind. Die Exponentialfunktion kann aber nicht stetig auf $\tilde{\mathbb{C}}$ fortgesetzt werden, denn bereits der Grenzwert

$$\lim_{\substack{y\to\infty\\ y\in\mathbb{R}}} \exp(iy) = \lim_{\substack{y\to\infty\\ y\in\mathbb{R}}} (\cos y + i\sin y)$$

existiert offenbar nicht (wir werden später sehen, daß exp bei ∞ eine „wesentliche Singularität“ hat). #

Beispiel 10.6 Der ***Logarithmus*** (Hauptwert) ist die Umkehrfunktion von

$$\exp : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C}\backslash\{0\}$$

mit dem Streifen

$$\mathcal{S} = \Big\{z = x+iy:\ x\in\mathbb{R},\ -\pi < y \le \pi\Big\}\,.$$

Er läßt sich explizit angeben durch

$$\ln : \mathbb{C}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathcal{S}\,, \quad \ln z = \ln|z| + i\arg(z)\,,$$

wobei mit $\arg(z)$ der Hauptwert des Arguments gemeint ist, $-\pi < \arg(z) \le \pi$. Offenbar ist ln auf $(-\infty, 0)$ nicht stetig, denn für eine Folge (z_n) mit $\operatorname{Im} z_n < 0$ und $z_n \longrightarrow -r$ $(r>0)$ gilt

$$\ln z_n \longrightarrow \ln r - i\pi = \Big(\ln r + i\pi\Big) - 2i\pi = \ln(-r) - 2i\pi\,.$$ #

10.2 Komplexe Differenzierbarkeit

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. f heißt in einem Punkt $z_0 \in \Omega$ (***komplex***) ***differenzierbar***, wenn der Grenzwert

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \text{existiert}.$$

Dieser Grenzwert heißt die ***Ableitung von*** f ***im Punkt*** z_0 und wird mit $f'(z_0)$ bezeichnet. f heißt (komplex) ***differenzierbar***, wenn es in jedem Punkt von Ω (komplex) differenzierbar ist, ***stetig differenzierbar***, wenn $f' : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig ist.

Für eine Funktion $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ kann man auch die ***partiellen Ableitungen***

$$\left.\begin{aligned} f_x(z_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\Big(f(z_0 + h) - f(z_0)\Big), \\ f_y(z_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\Big(f(z_0 + ih) - f(z_0)\Big) \end{aligned}\right. \qquad (\, h \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\,)$$

definieren, falls diese Grenzwerte existieren. f heißt dann ***partiell differenzierbar*** in z_0.

Satz 10.7 *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$. Ist f in z_0 (komplex) differenzierbar, so ist f in z_0 partiell differenzierbar und es gilt*

$$f_x(z_0) = -i f_y(z_0) = f'(z_0).$$

*Schreibt man $f(z) = u(z) + iv(z)$ mit reell–wertigen Funktionen $u, v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ (**Real**– bzw. **Imaginärteil** von f), so sind auch u und v in z_0 partiell differenzierbar und erfüllen die **Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen***

$$u_x(z_0) = v_y(z_0), \qquad v_x(z_0) = -u_y(z_0).$$

Beweis. Mit $z = z_0 + h$ ($h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) in der Definition der Ableitung von f folgt

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\Big(f(z_0 + h) - f(z_0)\Big) = f_x(z_0).$$

Entsprechend folgt mit $z = z_0 + ih \ (h \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{ih} (f(z_0 + ih) - f(z_0)) = \frac{1}{i} f_y(z_0) .$$

Mit $u(z) = \mathrm{Re}\, f(z)$ und $v(z) = \mathrm{Im}\, f(z)$ folgt daraus

$$\begin{aligned} u_x(z_0) + iv_x(z_0) &= (u+iv)_x(z_0) = f_x(z_0) = f'(z_0) = \frac{1}{i} f_y(z_0) \\ &= -i(u+iv)_y(z_0) = -iu_y(z_0) + v_y(z_0) . \end{aligned}$$

Vergleich von Real– und Imaginärteil liefert die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen im Punkt z_0 . □

Offensichtlich ist $u_x = v_y$ und $v_x = -u_y$ äquivalent zu $f_x = -if_y$. Für die Umkehrung des obigen Satzes muß auch noch die Stetigkeit der partiellen Ableitungen vorausgesetzt werden.

Satz 10.8 *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig partiell differenzierbar mit*

$$f_x(z) = -if_y(z) \qquad \textit{für alle} \quad z \in \Omega$$

$$(\textit{bzw.} \quad u_x(z) = v_y(z) , \quad v_x(z) = -u_y(z) \quad \textit{für alle} \quad z \in \Omega).$$

Dann ist f differenzierbar in Ω und $f' : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ ist stetig. (Tatsächlich zeigt der folgende Beweis mehr: Ist f in $z_0 = x_0 + iy_0$ total differenzierbar mit $f_x(z_0) = -if_y(z_0)$, so ist f in z_0 komplex differenzierbar.)

Beweis. Da u und v stetig partiell differenzierbar sind, sind sie im Sinn der reellen Analysis total differenzierbar. Es gilt also für $z_0, z \in \Omega$

$$\begin{aligned} u(z) - u(z_0) &= u_x(z_0)\,(x - x_0) + u_y(z_0)\,(y - y_0) + \varphi(z_0, z) , \\ v(z) - v(z_0) &= v_x(z_0)\,(x - x_0) + v_y(z_0)\,(y - y_0) + \psi(z_0, z) , \end{aligned}$$

wobei für φ und ψ gilt (man beachte $|z-z_0| = \left(|x-x_0|^2+|y-y_0|^2\right)^{1/2} = |(x,y)-(x_0,y_0)|$)

$$\lim_{z\to z_0} \frac{\varphi(z_0, z)}{|z - z_0|} = \lim_{z\to z_0} \frac{\psi(z_0, z)}{|z - z_0|} = 0 .$$

Wegen $v_x = -u_y$ und $v_y = u_x$ folgt hieraus

$$
\begin{aligned}
(z-z_0)^{-1}\Big(f(z)-f(z_0)\Big) &= (z-z_0)^{-1}\Big(u(z)-u(z_0)+i[v(z)-v(z_0)]\Big) \\
&= (z-z_0)^{-1}\Big\{u_x(z_0)\,(x-x_0)+u_y(z_0)\,(y-y_0)+\varphi(z_0,z) \\
&\qquad +i\Big[v_x(z_0)\,(x-x_0)+v_y(z_0)\,(y-y_0)+\psi(z_0,z)\Big]\Big\} \\
&= (z-z_0)^{-1}\Big\{u_x(z_0)\,(x-x_0)-v_x(z_0)\,(y-y_0)+\varphi(z_0,z) \\
&\qquad +i\Big[v_x(z_0)(x-x_0)+u_x(z_0)(y-y_0)+\psi(z_0,z)\Big]\Big\} \\
&= (z-z_0)^{-1}\Big\{u_x(z_0)\,\Big((x-x_0)+i(y-y_0)\Big) \\
&\qquad +iv_x(z_0)\Big((x-x_0)+i(y-y_0)\Big)+\varphi(z_0,z)+\psi(z_0,z)\Big\} \\
&= (z-z_0)^{-1}\,\Big\{\Big(u_x(z_0)+iv_x(z_0)\Big)(z-z_0)+\varphi(z_0,z)+\psi(z_0,z)\Big\} \\
&= u_x(z_0)+iv_x(z_0)+\frac{\varphi(z_0,z)}{z-z_0}+\frac{\psi(z_0,z)}{z-z_0} \\
&\longrightarrow u_x(z_0)+iv_x(z_0) \;=\; f_x(z_0) \quad \text{für} \quad z \longrightarrow z_0\,.
\end{aligned}
$$

Die Stetigkeit von f' folgt aus der Stetigkeit von u_x und v_x. □

10.3 Holomorphe Funktionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen; $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt ***holomorph*** (auch ***analytisch*** oder ***regulär***), wenn f in jedem Punkt von Ω (komplex) differenzierbar ist. — Man sagt auch, f ist ***bei*** z_0 ***holomorph***, wenn f in einer Umgebung von z_0 holomorph (komplex differenzierbar) ist. — f heißt ***bei*** ∞ ***holomorph***, wenn $g(z) := f(1/z)$ mit einem geeigneten Wert $g(0) = f(\infty)$ bei 0 holomorph ist; z. B. ist $f(z) = 1/z$ (mit $f(\infty) = 0$) bei ∞ holomorph, denn $g(z) = z$ ist bei 0 holomorph (das werden wir gleich explizit beweisen).

f ist offenbar genau dann bei z_0 (komplex) differenzierbar mit Ableitung $f'(z_0)$, wenn gilt

$$
\varrho(z) := \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0) \longrightarrow 0 \qquad \text{für} \quad z \longrightarrow z_0\,,
$$

also (***lineare Approximierbarkeit***)

$$f(z) \;=\; f(z_0) + f'(z_0)\,(z - z_0) + \varrho(z)\,(z - z_0)$$

mit $\varrho(z) \longrightarrow 0$ für $z \longrightarrow z_0$. Die Holomorphie in Ω ist also äquivalent zur linearen Approximierbarkeit in jedem $z_0 \in \Omega$.

Sei weiterhin f holomorph bei z_0, $f'(z_0) \neq 0$. Wir betrachten eine (zumindest im Punkt z_0) reguläre Kurve Γ durch z_0:

$$\gamma \,:\, [a,b] \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \gamma(t_0) = z_0 \quad \text{für ein} \quad t_0 \in (a,b)\,.$$

In $\gamma(t_0) = z_0$ hat die Kurve Γ die Richtung $\gamma'(t_0)$ ($\neq 0$ da γ regulär ist). Bei Anwendung von f geht diese Kurve Γ über in eine Kurve $\tilde{\Gamma}$ mit

$$\tilde{\gamma} \,:\, [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}\,, \quad \tilde{\gamma}(t) \;=\; f(\gamma(t))\,.$$

Diese Kurve $\tilde{\Gamma}$ hat in $\tilde{\gamma}(t_0) = f(z_0)$ die Richtung (Kettenregel, vgl. unten)

$$\tilde{\gamma}'(t_0) \;=\; f'(\gamma(t_0))\,\gamma'(t_0) \;=\; f'(z_0)\,\gamma'(t_0) \neq 0\,,$$

d. h. die Richtung der Kurve $\tilde{\Gamma}$ im Punkt $f(z_0)$ ist gegenüber der von Γ in z_0 um $\arg(f'(z_0))$ verdreht. Zwei Kurven, die sich in z_0 schneiden werden also unter f auf Kurven durch $f(z_0)$ abgebildet, die sich unter dem gleichen Winkel schneiden wie die ursprünglichen Kurven. Damit ist gezeigt:

Satz 10.9 *Holomorphe Abbildungen mit von Null verschiedener Ableitung sind* ***winkeltreu*** *oder* ***konform****.*

Es gelten die aus der reellen Analysis bekannten ***Differentiationsregeln***, die auch völlig analog bewiesen werden:

> Seien f und g holomorph bei z_0, $a, b \in \mathbb{C}$. Dann sind auch $af + bg$, fg und f/g bei z_0 holomorph, und es gilt
>
> $$(af + bg)'(z_0) \;=\; af'(z_0) + bg'(z_0)\,,$$
>
> $$(fg)'(z_0) \;=\; f(z_0)g'(z_0) + f'(z_0)g(z_0)\,, \text{ (\textbf{\textit{Produktregel}})},$$
>
> $$(f/g)'(z_0) \;=\; \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}\,, \quad \text{(\textbf{\textit{Quotientenregel}})}.$$

Ist f bei z_0 holomorph und g bei $f(z_0)$, so ist $g \circ f$ bei z_0 holomorph und es gilt die ***Kettenregel***,

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)\,.$$

Ist $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ injektiv und $f'(z) \neq 0$ für $z \in \Omega$, so ist auch die ***Umkehrfunktion*** $f^{-1} : f(\Omega) \longrightarrow \Omega$ holomorph und es gilt

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}\,.$$

Beispiel 10.10 Jedes ***Monom*** $f_n : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f_n(z) = z^n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ ist in ganz $\mathbb{C}$ holomorph mit $f_0'(z) = 0$, $f_n'(z) = nz^{n-1} = nf_{n-1}(z)$ für $n \in \mathbb{N}$; speziell ist jede ***konstante Funktion*** f holomorph mit $f' \equiv 0$, und die ***identische Funktion*** $\mathrm{id} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\mathrm{id}(z) = z$ ist holomorph mit $\mathrm{id}'(z) \equiv 1$. Der Beweis für $n = 0$ ist offensichtlich: $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^{-1}(1 - 1) = 0$. Der Rest folgt durch Induktion (Produktregel):

$$\begin{aligned} f_{n+1}(z) &= z f_n(z)\,, \\ f_{n+1}'(z) &= z f_n'(z) + 1 f_n(z) = n\,z\,z^{n-1} + z^n \\ &= (n+1)\,z^n = (n+1) f_n(z)\,. \end{aligned}$$

#

Beispiel 10.11 Jede rationale Funktion

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}\,, \quad f : \Omega = \Big\{ z \in \mathbb{C} : q(z) \neq 0 \Big\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

mit Polynomen $p(z) = \sum_{j=0}^m a_j z^j$ und $q(z) = \sum_{j=0}^n b_j z^j$ ist holomorph in Ω, wobei die Ableitung nach obigen Regeln berechnet werden kann. Ist $m := \operatorname{grad} p \leq n := \operatorname{grad} q$, so setzen wir

$$f(\infty) = \begin{cases} a_m / b_n & \text{falls } m = n\,, \\ 0 & \text{falls } m < n\,. \end{cases}$$

Dann ist f holomorph bei ∞, denn

$$g(z) = f\Big(\frac{1}{z}\Big) = z^{n-m}\, \frac{a_m + a_{m-1}z + \ldots + a_0 z^m}{b_n + b_{n-1}z + \ldots + b_0 z^n}$$

ist (wegen $b_n \neq 0$ und $n \geq m$) holomorph bei 0.

#

Beispiel 10.12 Die ***Exponentialfunktion*** exp ist in ganz $\mathbb{C}$ holomorph und es gilt wie in der reellen Analysis,

$$\exp' = \exp .$$

In „Analysis I“ wurde bereits gezeigt:

$$\lim_{w \to 0} \frac{1}{w}(e^w - 1) = 1 .$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \lim_{z \to z_0} \frac{1}{z - z_0}(e^z - e^{z_0}) &= \lim_{z \to z_0} \frac{1}{z - z_0}(e^{z - z_0} - 1)e^{z_0} \\ &= \lim_{w \to 0} \frac{1}{w}(e^w - 1)e^{z_0} = e^{z_0} . \end{aligned}$$

#

Beispiel 10.13 Die ***Konjugation*** $f(z) = \overline{z}$ ist an keiner Stelle in $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar, also **nicht** holomorph: Aus $f(z) = f(x + iy) = x - iy$ folgt

$$f_x(z) = 1 \quad \text{und} \quad f_y(z) = -i \qquad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C} ,$$

also gilt

$$f_x(z) = 1 \neq -1 = -if_y(z) \qquad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C} .$$

#

10.4 Holomorphe und harmonische Funktionen

Aus Satz **??** wissen wir: Ist $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph, so gilt für $u := \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$:

$$u_x(z) = v_y(z) , \quad u_y(z) = -v_x(z) \qquad \text{für alle} \quad z \in \Omega .$$

Nehmen wir an, daß f und somit auch u und v zwei mal stetig differenzierbar sind (in §13 werden wir sehen, daß jede holomorphe Funktion sogar beliebig oft differenzierbar ist), so folgt hieraus

$$\begin{aligned} \Delta u &= u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0 , \\ \Delta v &= v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0 . \end{aligned}$$

Funktionen g mit dieser Eigenschaft $(\Delta g = 0)$ heißen ***harmonisch***; die „partielle Differentialgleichung“ $\Delta g = 0$ heißt ***Laplace–Gleichung***.

Satz 10.14 *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend (d. h. je zwei Punkte können durch eine Kurve verbunden werden; zwei verschiedene Verbindungskurven können in Ω stetig ineinander übergeführt werden). Dann sind für eine Funktion $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ die folgenden Aussagen äquivalent.*

(i) u ist zweimal stetig differenzierbar mit $\Delta u = 0$ (kurz: u ist harmonisch),

(ii) es gibt eine holomorphe Funktion $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $u = \operatorname{Re} f$ (kurz: u ist der Realteil einer in Ω holomorphen Funktion).

Die entsprechende Aussage gilt für den Imaginärteil.

Beweis. **(ii) $\Longrightarrow$ (i):** Wie schon erwähnt wurde, werden wir später sehen, daß jede holomorphe Funktion (beliebig oft, also insbesondere) zweimal stetig differenzierbar ist. Mit den obigen Überlegungen folgt daraus $\Delta u \equiv 0$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Sei u zweimal stetig differenzierbar mit $\Delta u \equiv 0$. Es ist eine reellwertige Funktion $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ zu finden so, daß $f = u + iv$ holomorph ist. Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion v erfüllt dies genau dann, wenn gilt

$$\operatorname{grad} v(x,y) = \Big(v_x(x,y),\, v_y(x,y)\Big) = \Big(-u_y(x,y),\, u_x(x,y)\Big),$$

wobei wir Ω als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ auffassen. Das Vektorfeld

$$k(x,y) = \Big(-u_y(x,y),\, u_x(x,y)\Big)$$

ist rotationsfrei, denn es gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} k(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x} k_2(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} k_1(x,y) \\ &= u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = \Delta u(x,y) = 0\,.\end{aligned}$$

Nach einer Folgerung aus dem Satz von Stokes (vgl. Analysis II, § 27.4) besitzt also k ein Potential v,

$$\operatorname{grad} v(x,y) = k(x,y) = \Big(-u_y(x,y), u_x(x,y)\Big);$$

hieraus folgt, daß v zweimal stetig differenzierbar ist. Nach Satz **??** ist also $f = u + iv$ holomorph.

Der Imaginärteil v von f kann explizit berechnet werden als das Kurvenintegral

$$v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -u_y(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi + u_x(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\,,$$

wobei $(x_0, y_0) \in \Omega$ (bzw. eine Integrationskonstante) beliebig gewählt gewählt werden darf, und das Integral über eine beliebige Kurve von (x_0, y_0) nach (x, y) zu erstrecken ist. □

10.5 Übungsaufgaben

10.1 a) Für komplexe Zahlen z_1, z_2 gilt:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}\,, \quad \overline{z_1\, z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}\,,$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \qquad \text{(falls} \quad z_2 \neq 0)\,.$$

b) Ist f holomorph, so ist auch

$$g\,:\,z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$$

holomorph.

10.2 a) Die Funktionen $\cos, \sin : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ haben nur die aus $\mathbb{R}$ bekannten Nullstellen.

b) Für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im} z \neq 0$ gilt

$$\lim_{t\to\infty} |\sin tz| = \infty\,, \quad \lim_{t\to\infty} |\cos tz| = \infty\,.$$

c) Für jedes $c \in \tilde{\mathbb{C}}$ existiert eine Folge (z_n) aus $\mathbb{C}$ mit $z_n \longrightarrow \infty$ und $\exp(z_n) \longrightarrow c$.

10.3 Man untersuche, in welchen Punkten die folgenden Funktionen komplex differenzierbar sind und bestimme gegebenenfalls ihre Ableitung:

$$f(z) = \operatorname{Re} z\,, \quad g(z) = |z|\,, \quad h(z) = z\,\overline{z}\,.$$

10.4 a) Sei $A \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend, $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $f(z)$ reell für alle $z \in A$. Dann ist f konstant.
Anleitung: Man zeige $f'(z) = 0$ für alle $z \in A$.

b) Die gleiche Aussage gilt, wenn $\arg f(z)$ konstant ist.

10.5 Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

a) $f : \mathbb{C} \backslash (-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z^{1/n} := |z|^{1/n} \exp(\frac{i}{n} \arg z)$ (mit $-\pi < \arg z < \pi$) ist holomorph und es gilt

$$f'(z) = \frac{1}{n} f(z)^{1-n} = \frac{1}{n} \frac{1}{(z^{1/n})^{n-1}}.$$

b) f läßt sich nicht holomorph auf $\mathbb{C}$ fortsetzen.

10.6 Man untersuche, ob die folgenden Funktionen $u : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ Realteile von holomorphen Funktionen sind und bestimme gegebenenfalls alle zugehörigen holomorphen Funktionen:

a) $u(x, y) = x^2 - y^2 - e^x \sin y$,

b) $u(x, y) = x^2 + y^2$.

10.7 Sei $A \subset \mathbb{C}$ offen.

a) Ist $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig partiell differenzierbar, so gilt

$$f(z) = f(z_0) + \alpha(z - z_0) + \beta(\overline{z} - \overline{z}_0) + \varphi(z, z_0)$$

mit $|z - z_0|^{-1} \varphi(z, z_0) \longrightarrow 0$ für $z \longrightarrow z_0$ und

$$\alpha = f_z(z_0) := \frac{1}{2}(f_x(z_0) - i f_y(z_0)),$$

$$\beta = f_{\overline{z}}(z_0) := \frac{1}{2}(f_x(z_0) + i f_y(z_0)).$$

b) f ist genau dann holomorph, wenn $f_{\overline{z}} = 0$ gilt; dann ist $f' = f_z$.

c) Ist f zweimal stetig differenzierbar, so gilt $f_{\overline{z}z} = (f_{\overline{z}})_z = \frac{1}{4} \Delta f$.

11 Komplexe Kurvenintegrale

Die folgenden Überlegungen gelten im wesentlichen auch für die wesentlich größere Klasse der „rektifizierbaren“ Kurven. In der Praxis reicht es allerdings fast immer aus, Kurven zu betrachten, die sich aus Geradenstücken und Kreisbögen zusammensetzen lassen. Den hinreichend allgemeinen Rahmen stellen also die „stückweise stetig differenzierbaren“ Kurven dar, wie wir sie in Abschnitt **??** beschreiben werden.

11.1 Integrale über Wegstücke

Sei $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig differenzierbar (d. h. $\gamma(\cdot) = \gamma_1(\cdot) + i\gamma_2(\cdot)$ mit $\gamma_j : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar) und

$$\gamma'(t) = \gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t) \neq 0 \quad \text{für} \quad t \in (a, b)\,,$$

$$\gamma(t) \neq \gamma(t') \qquad \text{für} \quad t, t' \in [a, b] \quad \text{mit} \quad t \neq t'\,.$$

Wenn t von a nach b läuft, durchläuft $\gamma(t)$ eine „Kurve“ mit ***Anfangspunkt*** $\gamma(a)$ und ***Endpunkt*** $\gamma(b)$, ohne dabei einen Punkt zweimal zu durchlaufen oder „stehen zu bleiben“ ($\gamma' \neq 0$), d. h. die „Kurve“ ist „doppelpunktfrei“ und wird in einer wohldefinierten Richtung durchlaufen. — Die Punktmenge, die durchlaufen wird zusammen mit der Orientierung (hierfür genügt die Festlegung von Anfangs- und Endpunkt), nennen wir ein ***Wegstück*** Γ; γ heißt eine ***Parameterdarstellung*** des Wegstückes. (Es mag sehr einschränkend erscheinen, daß wir die Doppelpunktfreiheit verlangen; wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, wird man aber komplizierte Kurven ohnehin aus Wegstücken zusammensetzen; bei hinreichend feiner Zerlegung lassen sich dann immer Doppelpunkte vermeiden. Treten einzelne Doppelpunkte auf, so kann man diese durch weitere Zerlegung zu Anfangs- bzw. Endpunkten von Wegstücken machen.)

Ist Γ ein Wegstück mit einer Parametrisierung $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$, so erhält man das ***inverse Wegstück*** Γ^-, indem man die Orientierung umkehrt, d. h. Anfangs– und Endpunkt vertauscht. **Eine** Parameterdarstellung des inversen Wegstücks ist offenbar

$$\gamma^- : [-b, -a] \longrightarrow \mathbb{C}\,, \quad \gamma^-(t) = \gamma(-t)\,,$$

aber z. B. auch

$$\varphi^- : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}\,, \quad \varphi^-(t) = \gamma(a + b - t)\,.$$

Als Parameterintervalle werden besonders häufig gewählt $[0,1]$, $[0,2\pi]$, $[0,k\pi]$ oder $[0,L]$, wobei L die Kurvenlänge ist (vgl. unten).

Beispiel 11.1 Die Strecke Γ von einem Punkt z_0 (Anfangspunkt) zu einem Punkt z_1 (Endpunkt) kann z. B. wie folgt parametrisiert werden:

$$\gamma_1 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_1(t) = (1-t)z_0 + tz_1\,,$$

oder

$$\gamma_2 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_2(t) = \Big(\cos\frac{\pi}{2}t\Big)^2 z_0 + \Big(\sin\frac{\pi}{2}t\Big)^2 z_1\,,$$

oder

$$\gamma_3 : [0,|z_1-z_0|] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_3(t) = z_0 + \frac{t}{|z_1-z_0|}\,(z_1-z_0)\,.$$

Den dazu inversen Weg kann man entsprechend z. B. wie folgt parametrisieren:

$$\begin{aligned}
\gamma_1^- &: [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}, & \gamma_1^-(t) &= (1-t)z_1 + tz_0\,,\\
\gamma_2^- &: [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}, & \gamma_2^-(t) &= \Big(\cos\frac{\pi}{2}t\Big)^2 z_1 + \Big(\sin\frac{\pi}{2}t\Big)^2 z_0\,,\\
\gamma_3^- &: [0,|z_1-z_0|] \longrightarrow \mathbb{C}, & \gamma_3^-(t) &= z_1 + \frac{t}{|z_1-z_0|}(z_0-z_1)\,.
\end{aligned}$$

#

Beispiel 11.2 Der Halbkreisbogen Γ um 0 von $-r$ (Anfangspunkt) in der unteren Halbebene nach $+r$ (Endpunkt) kann z. B. parametrisiert werden durch

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma(t) \;=\; r\exp\Big(i\pi(t-1)\Big)$$

oder

$$\gamma_1 : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_1(t) \;=\; r\exp\Big(i(t-\pi)\Big)\,.$$

y

$-r$ 0 r

x

Entsprechend kann das inverse Wegstück parametrisiert werden durch:

$$\gamma^- \;:\; [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \gamma^-(t) = r\exp(-i\pi t)\,,$$

$$\gamma_1^- \;:\; [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \gamma_1^-(t) = r\exp(-it)\,. \qquad \#$$

Sei Γ ein Wegstück mit Parameterdarstellung γ und f eine zumindest auf der Punktmenge Γ definierte und dort stetige komplexwertige Funktion. Dann definiert man das ***Integral von*** f ***über das Wegstück*** Γ durch

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;:=\; \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Die Motivation für diese Definition ergibt sich aus folgender Überlegung: Wir denken uns das Wegstück unterteilt durch

$$\xi_0 \;=\; \gamma(a),\; \xi_1 = \gamma(t_1),\; \ldots,\; \xi_n = \gamma(b)$$

mit

$$a \;=:\; t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n \;:=\; b\,.$$

Dann sollte das Integral $\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ näherungsweise dargestellt werden durch eine „Riemann–Summe"

$$\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j^*)\,(\xi_j - \xi_{j-1})\,,$$

$\xi_1^* = \gamma(t_1^*)$ $\xi_1 = \gamma(t_1)$ $\gamma(b) = \xi_n \quad (n=4)$

$\xi_2^* = \gamma(t_2^*)$

$\xi_2 - \xi_1$ $\xi_n - \xi_{n-1}$

$\xi_1 - \xi_0$

$\xi_2 = \gamma(t_2)$

$\gamma(a) = \xi_0$ $\xi_3^* = \gamma(t_3^*)$ $\xi_3 - \xi_2$ $\xi_n^* = \gamma(t_n^*)$

$\xi_4 - \xi_3$ $\xi_4 = \gamma(t_4)$

$\xi_4^* = \gamma(t_4^*)$

$\xi_3 = \gamma(t_3)$

wobei ξ_j^* auf der Kurve zwischen $\xi_{j-1} = \gamma(t_{j-1})$ und $\xi_j = \gamma(t_j)$ liegt. Es gilt also, wobei man den Mittelwertsatz (der reellen Analysis) auf $\gamma_1 = \mathrm{Re}\,\gamma$ und $\gamma_2 = \mathrm{Im}\,\gamma$ anwendet, mit $t_{j-1} \le t_j^* \le t_j$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j^*)\,(\xi_j - \xi_{j-1}) &= \sum_{j=1}^{n} f(\gamma(t_j^*))\Big(\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\Big)\\
&= \sum_{j=1}^{n} f(\gamma(t_j^*))\left\{\frac{\gamma_1(t_j)-\gamma(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} + i\frac{\gamma_2(t_j)-\gamma_2(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right\}(t_j - t_{j-1})\\
&\qquad (\text{mit} \quad t_{j-1} < t_j^{(1)} < t_j,\ t_{j-1} < t_j^{(2)} < t_j\ )\\
&= \sum_{j=1}^{n} f(\gamma(t_j^*))\Big\{\gamma_1'(t_j^{(1)}) + i\gamma_2'(t_j^{(2)})\Big\}(t_j - t_{j-1})\\
&= \sum_{j=1}^{n} f(\gamma(t_j^*))\gamma'(t_j^*)\,(t_j - t_{j-1})\\
&\quad + \sum_{j=1}^{n} f(\gamma(t_j^*))\Big\{\Big(\gamma_1'(t_j^{(1)}) - \gamma_1'(t_j^*)\Big) + i\Big(\gamma_2'(t_j^{(2)}) - \gamma_2'(t_j^*)\Big)\Big\}(t_j - t_{j-1})\\
&\longrightarrow \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\,,
\end{aligned}
$$

wenn die Feinheit der Zerlegung gegen 0 geht, da der erste Summand eine Riemann–Summe des Integrals über $f(\gamma(t))\gamma'(t)$ ist und der zweite bei Verfeinerung gegen 0 strebt.

Satz 11.3 *Sei* Γ *ein Wegstück,* $f : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$ *stetig,* $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *und* $\varphi : [c,d] \longrightarrow \mathbb{C}$ *zwei Parameterdarstellungen von* Γ *. Dann gilt*

$$\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

d. h. das oben definierte Kurvenintegral ist unabhängig von der Wahl der Parameterdarstellung.

Beweis. Da $\gamma : [a,b] \longrightarrow \Gamma$ und $\varphi : [c,d] \longrightarrow \Gamma$ bijektiv sind, ist auch

$$\tau : [c,d] \longrightarrow [a,b], \quad \tau = \gamma^{-1} \circ \varphi$$

bijektiv, und es gilt $\tau(c) = a$ und $\tau(d) = b$.

γ^{-1} **ist stetig (und damit auch** τ **):** Sei (ξ_n) eine Folge aus Γ mit $\xi_n \longrightarrow \xi_0 \in \Gamma$ und $\gamma^{-1}(\xi_n) \not\longrightarrow \gamma^{-1}(\xi_0)$. Da $[a,b]$ kompakt ist, gibt es eine Teilfolge (ζ_n) von (ξ_n) und ein $t_0 \in [a,b]$ mit $\gamma^{-1}(\zeta_n) \longrightarrow t_0 \neq \gamma^{-1}(\xi_0)$. Mit der Stetigkeit von γ folgt hieraus

$$\zeta_n = \gamma(\gamma^{-1}(\zeta_n)) \longrightarrow \gamma(t_0) \neq \gamma(\gamma^{-1}(\xi_0)) = \xi_0\,,$$

im Widerspruch zu $\xi_n \longrightarrow \xi_0$.

τ **ist streng monoton:** Dies folgt aus der Stetigkeit und Bijektivität von $\tau : [c,d] \longrightarrow [a,b]$.

τ **ist in** $(\mathbf{c},\mathbf{d})$ **stetig differenzierbar** mit

$$\tau'(t) = \frac{\varphi'(t)}{\gamma'(\tau(t))}\,.$$

τ ist offenbar implizit definiert durch

$$F(\tau,t) = 0 \qquad \text{mit} \quad F(\tau,t) = \gamma(\tau) - \varphi(t)\,.$$

Wegen $D_\tau F(\tau,t) = \gamma'(\tau) \neq 0$ ist (nach dem Satz über implizite Funktionen) τ stetig differenzierbar mit

$$\tau'(t) = -\frac{D_t F(\tau,t)}{D_\tau F(\tau,t)} = \frac{\varphi'(t)}{\gamma'(\tau(t))}\,.$$

Für jedes Teilintervall $[c', d']$ von (c, d) gilt also

$$\int_{c'}^{d'} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{c'}^{d'} f(\gamma(\tau(t))\gamma'(\tau(t))\tau'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\text{(mit Substitutionsregel} \quad a' = \tau(c'),\, b' = \tau(d')\,)$$

$$= \int_{a'}^{b'} f(\gamma(s))\gamma'(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Für $c' \longrightarrow c$ und $d' \longrightarrow d$ gilt $a' \longrightarrow a$ und $b' \longrightarrow b$, und damit folgt die Behauptung. □

Für die Länge eines Wegstücks Γ mit Parameterdarstellung γ erhält man (wie aus der Analysis II bekannt ist)

$$|\Gamma| = \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t\,.$$

Diese Definition läßt sich analog zur Definition des Kurvenintegrals begründen und ist ebenfalls unabhängig von der Wahl der Parameterdarstellung.

Satz 11.4 *Sei* Γ *ein Wegstück,* $f, g : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$ *stetig,* $a, b \in \mathbb{C}$ *. Dann gilt*

a) $$\left|\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le |\Gamma| \max\Big\{|f(z)| : z \in \Gamma\Big\}\,,$$

b) $$\int_\Gamma (af + bg)(z)\,\mathrm{d}z = a\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z + b\int_\Gamma g(z)\,\mathrm{d}z\,,$$

c) $$\int_{\Gamma^-} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Beweis. Es sei γ eine Parameterdarstellung von Γ, γ^- eine Parameterdarstellung von Γ^-.

$$
\begin{aligned}
\text{20a)}\ \Big|\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z\Big| \;&=\; \Big|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\Big| \;\le\; \int_a^b |f(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\le\; \max\Big\{|f(z)| : z\in\Gamma\Big\}\int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t \;=\; \max\Big\{|f(z)| : z\in\Gamma\Big\}\,|\Gamma|\,.
\end{aligned}
$$

b) Dies ist offensichtlich.

$$
\begin{aligned}
\text{20c)}\ \int_{\Gamma^-} f(z)\,\mathrm{d}z \;&=\; \int_{a^-}^{b^-} f(\gamma^-(t)){\gamma^-}'(t)\,\mathrm{d}t \\
&=\; \int_{-b}^{-a} f(\gamma(-t))\Big\{-\gamma'(-t)\Big\}\,\mathrm{d}t \;=\; -\int_{-b}^{-a} f(\gamma(-t))\gamma'(-t)\,\mathrm{d}t \\
&\qquad (\text{Substitution}\quad t=-s\,) \\
&=\; \int_b^a f(\gamma(s))\gamma'(s)\,\mathrm{d}s \;=\; -\int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)\,\mathrm{d}s \;=\; -\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z\,.
\end{aligned}
$$

□

11.2 Stückweise stetig differenzierbare Kurven

Seien $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_n$ Wegstücke mit Parameterdarstellungen $\gamma_j : [a_j,b_j] \longrightarrow \mathbb{C}$ $(j=1,\ldots,n)$, Anfangspunkten $z_0^{(j)}$ und Endpunkten $z_1^{(j)}$ so, daß gilt $z_1^{(j)} = z_0^{(j+1)}$ $(j=1,\ldots,n-1)$.

Mit $\Gamma := \Gamma_1+\Gamma_2+\ldots+\Gamma_n$ bezeichnen wir das Gebilde, das wir bei Durchlaufen von $\Gamma_1,\Gamma_2,\ldots,\Gamma_n$ in dieser Reihenfolge erhalten. Wir bezeichnen dies als ***Kurve***, ***Integrationsweg*** oder einfach als ***Weg***. Die Punktmenge erhält man als Vereinigung der Wegstücke $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_n$; der Durchlaufsinn ergibt sich aus dem der Wegstücke. (Entsprechend können mehrere Kurven zu einer Kurve zusammengesetzt werden.) — Der ***Anfangspunkt*** von Γ ist $z_0 = z_0^{(1)}$, der ***Endpunkt*** ist $z_1 = z_1^{(n)}$. Der Weg heißt ***geschlossen***, wenn $z_0 = z_1$ gilt. (Im Gegensatz zu einem Wegstück darf eine Kurve geschlossen sein; sie darf auch Doppelpunkte haben.)

Das ***Kurvenintegral*** einer stetigen Funktion $f : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$ über eine Kurve $\Gamma = \Gamma_1 + \ldots + \Gamma_n$ mit Wegstücken $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_n$ definiert man durch

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Es ist leicht zu sehen, daß diese Definition unabhängig ist von der Darstellung der Kurve durch Wegstücke (hat man zwei Darstellungen mit $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ bzw. $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, so wählt man eine Darstellung durch Wegstücke, die eine „Verfeinerung“ beider Darstellungen ist).

Die ***inverse Kurve*** ist $\Gamma^- = \Gamma_n^- + \ldots + \Gamma_1^-$. Durch $\Gamma + \Gamma^-$ wird eine Kurve beschrieben, bei der jedes Wegstück in beiden Richtungen durchlaufen wird. Es gilt

$$\int\limits_{\Gamma^-} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int\limits_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$$

und somit

$$\int\limits_{\Gamma+\Gamma^-} f(z)\,\mathrm{d}z = 0\,.$$

Wegstücke, die in beiden Richtungen je einmal durchlaufen werden, können also bei der Integration einfach weggelassen werden. Man nennt deshalb $\Gamma + \Gamma^-$ auch einen „***Nullweg***“.

Satz 11.5 *Sind* $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ *Kurven (mit Endpunkt von* Γ_1 *gleich Anfangspunkt von* Γ_2*) und* f, g *stetige Funktionen auf geeigneten Mengen,* $a, b \in \mathbb{C}$, *so gilt:*

a) $$\int\limits_{\Gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_{\Gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{\Gamma_1+\Gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z\,,$$

b) $$\int\limits_{\Gamma} (af + bg)(z)\,\mathrm{d}z = a\int\limits_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z + b\int\limits_{\Gamma} g(z)\,\mathrm{d}z\,,$$

c) $$\Big|\int\limits_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z\Big| \le |\Gamma| \max\Big\{|f(z)| : z \in \Gamma\Big\}\,,$$

d) $$\int\limits_{\Gamma^-} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int\limits_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Die ***Beweise*** sind trivial bzw. völlig analog zu Satz **??**.

Beispiel 11.6 Wir integrieren die Funktion

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = z^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

über verschiedene Wege von -1 nach 1:

(i) Γ_1 sei die geradlinige Verbindung von -1 nach 1. Die naheliegende Parameterdarstellung ist

$$\gamma_1 : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_1 = \mathrm{id}\,,$$

mit der man sofort erkennt, daß das Kurvenintegral genau das normale Integral über das Intervall $[-1,1]$ ist:

$$\int\limits_{[-1,1]} z^n \, \mathrm{d}z = \int\limits_{-1}^{1} t^n \cdot 1 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}\, t^{n+1}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{n+1}\left\{1 - (-1)^{n+1}\right\}.$$

Das erhält man natürlich auch (z. B.) mit der Parameterdarstellung

$$\varphi_1 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}\,, \quad \varphi_1(t) = 2t - 1\,,$$

$$\begin{aligned} \int\limits_{[-1,1]} z^n \, \mathrm{d}z &= \int\limits_{0}^{1} (2t-1)^n \cdot 2 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}\,(2t-1)^{n+1}\Big|_{0}^{1} \\ &= \frac{1}{n+1}\left\{1 - (-1)^{n+1}\right\}. \end{aligned}$$

(ii) Γ_2 sei der Kreisbogen um 0 in der unteren Halbebene von -1 nach 1. Wie wir oben gesehen haben, ist eine Parameterdarstellung gegeben durch

$$\gamma_2 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \gamma_2(t) = e^{i\pi(t-1)}\,.$$

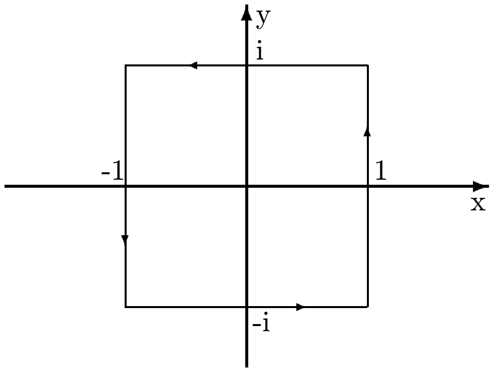
Damit folgt

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Gamma_2} z^n \, \mathrm{d}z &= \int\limits_{0}^{1} \gamma(t)^n \gamma'(t) \, \mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{1} e^{in\pi(t-1)} i\pi e^{i\pi(t-1)} \, \mathrm{d}t \\ &= i\pi \int\limits_{0}^{1} e^{i(n+1)\pi(t-1)} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1} e^{i(n+1)\pi(t-1)}\Big|_{0}^{1} \\ &= \frac{1}{n+1}\left\{1 - (-1)^{n+1}\right\} = \int\limits_{\Gamma_1} f(z) \, \mathrm{d}z\,. \end{aligned}$$

Ohne daß hierfür bisher ein mathematischer Grund zu erkennen ist, haben wir also über beide Kurven das gleiche Integral erhalten (ein Anzeichen für Wegunabhängigkeit?). #

11.3 Übungsaufgaben

11.1 Man berechne $\displaystyle\int_\Gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z$, wobei Γ der durch die folgende Skizze beschriebene Weg ist.



Anleitung: Man braucht nur das Integral über eines der Geradenstücke explizit zu berechnen.

12 Der Cauchy'sche Integralsatz

12.1 Integrierbarkeit, Wegunabhängigkeit des Integrals

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. Eine Funktion $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt eine ***Stammfunktion*** von f, wenn F in Ω holomorph (also komplex differenzierbar) ist mit $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in \Omega$. Mit F ist natürlich auch $F + c$ für jedes $c \in \mathbb{C}$ eine Stammfunktion. Abkürzend nennt man eine Funktion $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, die eine Stammfunktion besitzt, auch ***integrierbar***.

Beispiel 12.1 Für die folgenden Funktionen können wir ohne Schwierigkeiten **eine** Stammfunktion angeben:

a) $f(z) = z^n \implies F(z) = \dfrac{1}{n+1} z^{n+1}$,

b) $f(z) = \exp(z) \implies F(z) = \exp(z)$,

c) $f(z) = \sin(z) \implies F(z) = -\cos(z)$,
denn es gilt

$$\begin{aligned} \cos' z &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left\{\frac{1}{2}\Big(\exp(iz) + \exp(-iz)\Big)\right\} = \frac{i}{2}\Big\{\exp(iz) - \exp(-iz)\Big\} \\ &= \frac{-1}{2i}\Big\{\exp(iz) - \exp(-iz)\Big\} = -\sin z, \end{aligned}$$

d) $f(z) = \cos z \implies F(z) = \sin z$ (mit entsprechender Rechnung). #

Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig, F eine Stammfunktion von f und Γ eine Kurve in Ω mit Parameterdarstellung $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$, Anfangspunkt z_0 und Endpunkt z_1, so gilt

$$\begin{aligned} \int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{d}{\mathrm{d}t} F(\gamma(t))\,\mathrm{d}t \\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(z_1) - F(z_0), \end{aligned}$$

d. h. das Kurvenintegral hängt nicht von der Kurve Γ, sondern nur von deren Anfangs– und Endpunkt ab, es ist wegunabhängig.

Satz 12.2 *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt: f besitzt genau dann eine Stammfunktion F, wenn das Kurvenintegral über f (in Ω) wegunabhängig ist.*

Beweis. $\Longrightarrow$: Wurde bereits vor der Formulierung des Satzes bewiesen.

$\Longleftarrow$: Da das Kurvenintegral über f wegunabhängig ist, können wir definieren

$$F(z) := \int_{z_0}^{z} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi \qquad \text{für alle} \quad z \in \Omega\,,$$

wobei das Integral über einen beliebigen Weg von z_0 nach z zu erstrecken ist. (Natürlich geht dieses nur für die z aus der gleichen Zusammenhangskomponente wie z_0; auf entsprechende Weise können aber alle Zusammenhangskomponenten einzeln behandelt werden.) Da Ω offen ist, gibt es zu jedem $z \in \Omega$ eine Kreisscheibe um z, die ganz in Ω liegt. Für z' hinreichend nahe bei z ist also die **Strecke** $[z, z']$ von z nach z' ganz in Ω und somit gilt

$$\begin{aligned}
F(z') &= \int_{z_0}^{z'} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int_{[z,z']} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= F(z) + \int_{[z,z']} f(z)\,\mathrm{d}\xi + \int_{[z,z']} (f(\xi) - f(z))\,\mathrm{d}\xi \\
&= F(z) + (z'-z)f(z) + \int_{[z,z']} (f(\xi) - f(z))\,\mathrm{d}\xi\,, \\
\frac{F(z') - F(z)}{z' - z} &= f(z) + \frac{1}{z'-z}\int_{[z,z']} (f(\xi) - f(z))\,\mathrm{d}\xi\,, \\
\left|\frac{F(z') - F(z)}{z' - z} - f(z)\right| &\leq \frac{1}{|z'-z|}|z'-z| \max\Big\{|f(\xi) - f(z)| : \xi \in [z, z']\Big\} \\
&\longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad z' \longrightarrow z\,.
\end{aligned}$$

Also ist F komplex differenzierbar und es gilt $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in \Omega$, d. h. f hat eine Stammfunktion. $\square$

Eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ heißt ***sternförmig***, wenn ein $z_0 \in \Omega$ existiert so, daß für jedes $z \in \Omega$ die Verbindungsstrecke $[z_0, z]$ ganz in Ω liegt. Für jedes z_0 dieser Art sagt man: Ω ist ***sternförmig bezüglich*** $\mathbf{z_0}$. Sternförmig sind z. B. Kreise, Quadrate und $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$; dagegen ist offenbar $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ **nicht** sternförmig.

Satz 12.3 *Sei* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *offen und sternförmig bezüglich* z_0, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *stetig und*

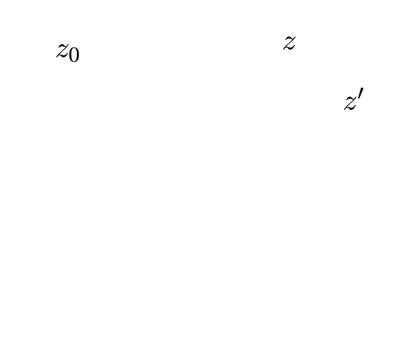
$$\int_{\triangle} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

für jeden Dreiecksweg $\triangle$ *mit* z_0 *als Eckpunkt. Dann besitzt* f *eine Stammfunktion (d. h. das Kurvenintegral über* f *ist wegunabhängig).*

Beweis. Da Ω bezüglich z_0 sternförmig ist, können wir definieren

$$F(z) := \int_{[z_0,z]} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Da außerdem Ω offen ist, liegt für z' hinreichend nahe bei z wieder die Strecke $[z,z']$ in Ω; da Ω sternförmig bezüglich z_0 ist, liegt damit der gesamte Dreiecksweg $\triangle = \triangle(z_0,z,z')$, einschließlich seines Inneren in Ω. Somit gilt (wegen $\int_{\triangle(z_0,z,z')} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0$)



$$\begin{aligned} F(z') &= \int_{[z_0,z']} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{[z_0,z]} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int_{[z,z']} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\ &= F(z) + \int_{[z,z']} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,. \end{aligned}$$

Wie im Beweis des vorhergehenden Satzes folgt, daß F eine Stammfunktion von f ist. □

Eine offene Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{C}$ heißt ***einfach zusammenhängend***, wenn Ω zusammenhängend ist und das Innere jedes geschlossenen Polygonzuges in Ω ganz in Ω liegt.

(Das kann man auch so formulieren: ... wenn jeder geschlossene Polygonzug in Ω stetig auf einen Punkt zusammengezogen werden kann, ohne daß dabei Ω jemals verlassen wird; im Gegensatz zur zuerst angegebenen Definition ist diese auch in $\mathbb{R}^m$ mit $m > 2$ sinnvoll. Im Sinne einer späteren Definition würde das heißen: Ω heißt einfach zusammenhängend, wenn jeder geschlossene Polygonzug bezüglich Ω „nullhomotop" ist.) Offenbar sind z. B. $\mathbb{C}$, Kreise und $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ einfach zusammenhängend; $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ ist **nicht** einfach zusammenhängend, wie wir in Beispiel **??** explizit sehen werden. (Für $m > 2$ ist $\mathbb{R}^m\backslash\{0\}$ einfach zusammenhängend, im Gegensatz zu $\mathbb{R}^2\backslash\{0\} \sim \mathbb{C}\backslash\{0\}$.)

Satz 12.4 *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig und*

$$\int_{\triangle} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

für jeden Dreiecksweg $\triangle$ in Ω. Dann besitzt f eine Stammfunktion.

Beweis. Sei $z_0 \in \Omega$ fest gewählt. Für jedes $z \in \Omega$ definieren wir

$$F(z) := \int_{P(z_0,z)} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,,$$

wobei $P(z_0, z)$ ein beliebiger Polygonzug von z_0 nach z ist. Damit ist $F(\cdot)$ wohldefiniert: Da Ω zusammenhängend ist, gibt es jedenfalls einen Polygonzug von z_0 nach z. Es bleibt zu zeigen, daß das Integral nicht von der Wahl des Polygonzuges abhängt. Dazu seien P_1, P_2 zwei Polygonzüge von z_0 nach z_1; $P_1 - P_2$ ist also ein geschlossener Polygonzug in Ω, dessen Inneres ganz in Ω liegt. Teilt man das Innere von $P_1 - P_2$ in Dreiecke auf und läßt jede innere Kante in beiden Richtungen durchlaufen, so gilt

P_1

$-P_2$ z_1

z_0

$$P_1 - P_2 = \triangle_1 + \triangle_2 + \ldots + \triangle_n$$

und somit nach Voraussetzung

$$\int\limits_{P_1} f(z)\,\mathrm{d}z - \int\limits_{P_2} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\triangle_j} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 0\,.$$

Nachdem damit $F(\cdot)$ wohldefiniert ist, geht der Rest des Beweises wieder wie in Satz **??**. □

Satz 12.5 *Sei* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *offen,* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *stetig und*

$$\int\limits_{\triangle} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 0$$

für jeden Dreiecksweg in Ω*, dessen Inneres ganz in* Ω *liegt. Dann gilt*

$$\int\limits_{P} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 0$$

für jeden geschlossenen Polygonzug in Ω*, dessen Inneres ganz in* Ω *liegt. Oder gleichbedeutend: Sind* P_1, P_2 *Polygonzüge mit gleichen Anfangs– und Endpunkten so, daß das Gebiet zwischen* P_1 *und* P_2 *ganz zu* Ω *gehört, so gilt*

$$\int\limits_{P_1} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int\limits_{P_2} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Der Beweis ist völlig analog zu dem des vorhergehenden Satzes.

12.2 Cauchy'scher Integralsatz

Die im vorigen Abschnitt bewiesenen Sätze zeigen, daß der Schlüssel für den Beweis der Existenz einer Stammfunktion von f (bzw. der Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals) im Verschwinden der Integrale über Dreieckswege liegt. Genau dies werden wir jetzt für holomorphe Funktionen f beweisen.

Satz 12.6 *Sei* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *offen,* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *holomorph (d. h. in jedem Punkt von* Ω *komplex differenzierbar). Dann gilt*

$$\int\limits_{\triangle} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 0$$

für jeden Dreiecksweg $\triangle$ *in* Ω *, dessen Inneres ganz in* Ω *liegt.*

Beweis. Wir geben zwei Beweise dieses Satzes an: Im ersten benutzen wir den Satz von Stokes für $m = 2$. Dabei müssen wir allerdings voraussetzen, daß f **stetig** differenzierbar ist; da wir das bei der Definition der Holomorphie nicht gefordert haben, ist dies also kein vollgültiger Beweis. Dafür liefert er allerdings gleich das Verschwinden des Integrals über jede stückweise stetig differenzierbare geschlossene Kurve.

1. Sei also f **stetig** komplex differenzierbar, Γ eine stückweise stetig differenzierbare geschlossene Kurve. Dann gilt

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int\limits_{a}^{b} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$(\, f \;=\; u + iv,\ \gamma = \gamma_1 + i\gamma_2\,)$$

$$= \int\limits_{a}^{b} \Big\{u(\gamma(t)) + iv(\gamma(t))\Big\}\Big\{\gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t)\Big\}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int\limits_{a}^{b} \Big[\Big\{u(\gamma(t))\gamma_1'(t) - v(\gamma(t))\gamma_2'(t)\Big\} + i\Big\{u(\gamma(t))\gamma_2'(t) + v(\gamma(t))\gamma_1'(t)\Big\}\Big]\,\mathrm{d}t$$

$$= \int\limits_{a}^{b} \Big[\Big\langle\Big(u(\gamma(t)), -v(\gamma(t))\Big), \Big(\gamma_1'(t),\, \gamma_2'(t)\Big)\Big\rangle$$

$$+ i\Big\langle\Big(v(\gamma(t)), u(\gamma(t))\Big), (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t)\Big)\Big\rangle\Big]\,\mathrm{d}t$$

$$= \int\limits_{\Gamma} u(x,y)\,\mathrm{d}x - v(x,y)\,\mathrm{d}y + i\int\limits_{\Gamma} v(x,y)\,\mathrm{d}x + u(x,y)\,\mathrm{d}y$$

(mit dem Satz von Stokes in der Ebene, $D =$ Inneres der Kurve Γ,

$\pm$ in Abhängigkeit von der Orientierung von Γ)

$$= \;\pm\int\limits_{D} \Big\{\ \mathrm{rot}\ \Big(u(x,y), -v(x,y)\Big) + i\ \mathrm{rot}\ \Big(v(x,y), u(x,y)\Big)\Big\}\,\mathrm{d}(x,y)$$

$$= \pm \int_D \Big\{ \Big(u_y(x,y) + v_x(x,y) \Big) + i \Big(v_y(x,y) - u_x(x,y) \Big) \Big\} \, \mathrm{d}(x,y)$$

$$= 0 \,,$$

da der letzte Integrand auf Grund der Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen verschwindet.

2. Wir setzen jetzt nur die komplexe Differenzierbarkeit von f in Ω voraus. Wir nehmen an, daß die Behauptung nicht gilt, d. h. es gibt einen Dreiecksweg $\triangle_0$ in Ω, dessen Inneres ganz in Ω liegt, mit

$$C := \Big| \int_{\triangle_0} f(z) \, \mathrm{d}z \Big| > 0 \,.$$

Man zerlegt nun $\triangle_0$ in die Summe von 4 Dreieckswegen, indem jede Seite von $\triangle_0$ halbiert wird und alle Strecken im Innern in jeder Richtung durchlaufen werden (vgl. Bild). Es gilt also

$$\triangle_0 = \triangle_1^1 + \triangle_2^1 + \triangle_3^1 + \triangle_4^1$$

und somit

$$C = \Big| \int_{\triangle_0} f(z) \, \mathrm{d}z \Big| \le \sum_{j=1}^{4} \Big| \int_{\triangle_j^1} f(z) \, \mathrm{d}z \Big| \,.$$

Also gibt es ein $j_1 \in \{1,2,3,4\}$ mit der Eigenschaft

$$\Big| \int\limits_{\triangle^1_{j_1}} f(z)\,\mathrm{d}z \Big| \;\geq\; \frac{C}{4}\,.$$

Nun verfährt man mit $\triangle_1 := \triangle^1_{j_1}$ entsprechend wie oben mit $\triangle$, indem man $\triangle_1$ zerlegt in 4 Dreieckswege $\triangle^2_1, \triangle^2_2, \triangle^2_3, \triangle^2_4$. Es gibt dann ein $j_2 \in \Big\{1,2,3,4\Big\}$ so, daß für $\triangle_2 := \triangle^2_{j_2}$ gilt

$$\Big| \int\limits_{\triangle_2} f(z)\,\mathrm{d}z \Big| \;\geq\; \frac{1}{4}\Big| \int\limits_{\triangle_1} f(z)\,\mathrm{d}z \Big| \;\geq\; \frac{C}{4^2}\,.$$

Durch Iteration dieses Verfahrens erhält man eine Folge von Dreieckswegen $(\triangle_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\Big| \int\limits_{\triangle_n} f(z)\,\mathrm{d}z \Big| \;\geq\; \frac{C}{4^n}\,, \tag{$*$}$$

wobei jeweils $\triangle_{n+1}$ innerhalb von $\triangle_n$ liegt. Ist L_n die Länge des Dreiecksweges $\triangle_n$ und ist D_n die größte Kantenlänge von $\triangle_n$, so gilt offensichtlich

$$D_n \;=\; \frac{D_0}{2^n}\,, \quad \text{Ł}_n \;=\; \frac{L_0}{2^n}\,.$$

Wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{C}(=\mathbb{R}^2)$ gibt es genau ein $z_0 \in \mathbb{C}$, das in allen Dreiecken $\triangle_n$ enthalten ist, und auf das sich diese Dreiecke zusammenziehen. Da f in z_0 differenzierbar ist, gilt

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)\,(z-z_0) + (z-z_0)\varphi(z)$$

mit $\varphi(z) \longrightarrow 0$ für $z \longrightarrow z_0$, also

$$\Big| \int\limits_{\triangle_n} f(z)\,\mathrm{d}z \Big| \;=\; \Big| \int\limits_{\triangle_n} \Big\{ f(z_0) + f'(z_0)\,(z-z_0) \Big\}\,\mathrm{d}z \;+\; \int\limits_{\triangle_n} (z-z_0)\varphi(z)\,\mathrm{d}z \Big|\,.$$

Der erste Integrand besitzt eine Stammfunktion $f(z_0)z+f'(z_0)(z-z_0)^2/2$; also verschwindet das erste Integral, und mit $\varphi_0(t) := \max\Big\{|\varphi(z)| : |z-z_0| \le t\Big\}$ gilt

$$\begin{aligned} \Big|\int\limits_{\triangle_n} f(t)\,\mathrm{d}z\Big| \;&\le\; L_n D_n \varphi_0(D_n) \;=\; \frac{L_0}{2^n}\frac{D_0}{2^n}\,\varphi_0(D_n) \\ &=\; \frac{1}{4^n}\varepsilon_n \quad (\varepsilon_n := L_0 D_0 \varphi_0(D_n)) \end{aligned}$$

mit $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ für $n \longrightarrow \infty$. Das ist im Widerspruch zu obiger Ungleichung (*). □

Satz 12.7 (Cauchy'scher Integralsatz, einfach zusammenhängende Gebiete)
Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f integrierbar (also ist das Kurvenintegral wegunabhängig bzw. das Kurvenintegral über jede geschlossene Kurve verschwindet).

Beweis. Nach Satz **??** genügt es, für jeden Dreiecksweg $\triangle$ in Ω zu zeigen, daß das Kurvenintegral über $\triangle$ verschwindet. Dies ergibt sich sofort aus dem eben bewiesenen Satz **??**; dieser ist anwendbar, da auf Grund des einfachen Zusammenhangs von Ω das Innere jedes Dreiecksweges in Ω ganz in Ω liegt. □

Wir nennen einen (geschlossenen) Weg Γ in Ω ***nullhomotop bezüglich*** Ω, wenn Γ geschrieben werden kann in der Form

$$\Gamma \;=\; \Gamma_1 + \ldots + \Gamma_n$$

mit geschlossenen Wegen $\Gamma_j \subset \Omega_j$, wobei die Ω_j einfach zusammenhängende (z. B. sternförmige) Teilmengen von Ω sind; dabei ist natürlich insbesondere daran gedacht, für die Darstellung $\Gamma = \Gamma_1 + \ldots + \Gamma_n$ Wegstücke hinzuzunehmen, die in beiden Richtungen durchlaufen werden.

Man sieht z. B. leicht, daß der erste Weg in folgender Abbildung nullhomotop ist.

0 0

nullhomotop **bzw.** **nicht nullhomotop** **in** $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Für einen Kreisweg Γ in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ um den Nullpunkt gelingt es nicht, eine solche Zerlegung anzugeben. (Da dies an unserer mangelnden Fantasie liegen könnte, beweist dies noch nicht, daß Γ nicht nullhomotop ist; das werden wir aber in Beispiel **??** explizit beweisen.)

Satz 12.8 *(Cauchy'scher Integralsatz, beliebige Gebiete) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für jede bezüglich Ω nullhomotope Kurve Γ in Ω*

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 0\,.$$

Beweis. Ist $\Gamma = \Gamma_1 + \ldots + \Gamma_n$ im Sinne der obigen Definition, so gilt

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma_j} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 0\,,$$

da nach Satz **??** jedes der Integrale über $\Gamma_j\,(j = 1, \ldots, n)$ verschwindet. □

12.3 Anwendungen des Cauchy'schen Integralsatzes

Der folgende Satz untersucht die Situation, in der ein geschlossener Weg eine Teilmenge A, in der f u. U. nicht holomorph (oder evtl. gar nicht definiert) ist, ein– oder mehrfach umläuft. Das Integral hängt dann nur davon ab, wie oft diese Menge umlaufen wird.

Satz 12.9 *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend, $A \subset \Omega$, $f : \Omega\setminus A \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann gibt es ein $C \in \mathbb{C}$ so, daß für jeden geschlossenen Weg Γ in $\Omega\setminus A$,* *der A genau N mal in positivem Sinn umläuft (Umläufe in negativem Sinn sind negativ zu zählen) gilt*

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; NC \qquad\qquad (N \in \mathbb{Z})\,.$$

(Ist $A = \{z_0\}$ ein einzelner Punkt, so nennt man diesen Punkt eine ***isolierte Singularität*** *und die Zahl C wird als* **Residuum** *der Funktion f bei z_0 bezeichnet,* $\mathrm{Res}(f, z_0)$ *.)*

Beweis. Sei Γ_1 ein (fest gewählter) geschlossener Weg in $\Omega\backslash A$, der A einmal in positivem Sinn umläuft,

$$\Gamma_N := \Gamma_1 + \Gamma_1 + \ldots + \Gamma_1 \quad (\text{bzw. } (-\Gamma_1) + \ldots + (-\Gamma_1) \text{ für } N < 0)\,.$$

Γ

Ω

Umlaufzahl $N = 2$

Durch Einfügen geeigeneter Verbindungswege, die jeweils in beiden Richtungen durchlaufen werden, ist (zumindest in geometrisch einfachen Situationen) leicht zu sehen, daß $\Gamma - \Gamma_N$ nullhomotop bezüglich $\Omega\backslash A$ ist. Also gilt

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_N} f(z)\,\mathrm{d}z = N\int_{\Gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = NC$$

mit $C = \int_{\Gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z$. □

Beispiel 12.10 Sei $\Omega = \mathbb{C}\backslash\{z_0\}$, $f(z) = (z - z_0)^n$ für $n \in \mathbb{Z}$, Γ_r der Kreisweg mit Radius r um den Punkt z_0 ; eine Parameterdarstellung ist

$$\gamma_r : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_r(t) = z_0 + re^{2\pi i t}\,.$$

Dann gilt:

$$\int_{\Gamma_r} (z - z_0)^n \, \mathrm{d}z \;=\; \int_0^1 r^n e^{2\pi i n t} 2\pi i r e^{2\pi i t} \, \mathrm{d}t \;=\; 2\pi i r^{n+1} \int_0^1 e^{2\pi i (n+1) t} \, \mathrm{d}t \,.$$

Nach dem Cauchy'schen Integralsatz verschwindet das Integral natürlich für $\mathbf{n} \neq \mathbf{-1}$. Für $\mathbf{n} = \mathbf{-1}$ erhält man daraus sofort

$$\int_{\Gamma_r} \frac{1}{z - z_0} \, \mathrm{d}z \;=\; 2\pi i \int_0^1 1 \, \mathrm{d}t \;=\; 2\pi i \,.$$

Für $\mathbf{n} \neq \mathbf{-1}$ folgt

$$\int_{\Gamma_r} (z - z_0)^n \, \mathrm{d}z \;=\; \frac{2\pi i r^{n+1}}{2\pi i (n+1)} e^{2\pi i (n+1) t} \Big|_{t=0}^{t=1} \;=\; \frac{r^{n+1}}{n+1} \, (1 - 1) \;=\; 0 \,.$$

Die gleichen Resultate erhält man natürlich für jede geschlossene Kurve Γ, die den Punkt z_0 einmal in positiver Richtung umläuft. Da $f(z) = \dfrac{1}{z - z_0}$ in $\mathbb{C} \backslash \{z_0\}$ holomorph ist, aber $\int_{\Gamma_r} \dfrac{1}{z - z_0} \, \mathrm{d}z \neq 0$ gilt, ist Γ_r in $\mathbb{C} \backslash \{0\}$ nicht nullhomotop, und somit $\mathbb{C} \backslash \{z_0\}$ nicht einfach zusammenhängend. #

Beispiel 12.11 Sei $\Omega = \mathbb{C}$, $f(z) = \exp(-z^2)$; f ist also holomorph in ganz $\mathbb{C}$, Integrale über geschlossene Kurven verschwinden. Wir betrachten den Integrationsweg

Γ_3 Γ_2

Γ_1

$$\Gamma \;=\; \Gamma_1 + \Gamma_2 - \Gamma_3 \,,$$

Γ_1 Strecke von 0 nach R, $\gamma_1 : [0, R] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_1(t) = t$,

Γ_2 Kreisbogen um 0 von R nach $Re^{i\pi/4}$, $\gamma_2 : [0, \pi/4] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_2(t) = Re^{it}$,

Γ_3 Strecke von 0 nach $Re^{i\pi/4}$, $\gamma_3 : [0, R] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_3(t) = te^{i\pi/4}$.

Da Γ in (dem einfach zusammenhängenden Gebiet) $\mathbb{C}$ geschlossen ist, gilt für jedes R

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} - \int_{\Gamma_3} \exp(-z^2)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^R e^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi/4} \exp\Big\{-R^2 e^{2it}\Big\} Rie^{it}\,\mathrm{d}t - \int_0^R \exp\Big\{(te^{i\pi/4})^2\Big\} e^{i\pi/4}\,\mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

Für das erste Integral ist aus der Analysis bekannt, daß es für $R \longrightarrow \infty$ gegen $\dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$ konvergiert. Der Vollständigkeit halber sei der Beweis hier angedeutet:

$$\begin{aligned} &\lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^R e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \lim_{R\to\infty} \Big\{ \int_{-R}^R e^{-\xi_1^2}\,\mathrm{d}\xi_1 \int_{-R}^R e^{-\xi_2^2}\,\mathrm{d}\xi_2 \Big\}^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{R\to\infty} \Big\{ \int_{\{x\in\mathbb{R}^2 : |\xi_1|, |\xi_2| \le R\}} e^{-|x|^2}\,\mathrm{d}x \Big\}^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{R\to\infty} \Big\{ \int_{\{x\in\mathbb{R}^2 : |x| \le R\}} e^{-|x|^2}\,\mathrm{d}x \Big\}^{1/2} \\ &\qquad \text{(in Polarkoordinaten } x = r\omega,\ |\omega| = 1\text{)} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{R\to\infty} \Big\{ \int_0^R r \int_{|\omega|=1} e^{-r^2}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}r \Big\}^{1/2} = \frac{1}{2} \lim_{R\to\infty} \Big\{ \int_0^R 2\pi r e^{-r^2}\,\mathrm{d}r \Big\}^{1/2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,. \end{aligned}$$

Nun zeigen wir, daß das Integral über Γ_2 für $R \longrightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert. Zunächst gilt

$$\begin{aligned} \Big| \int_{\Gamma_2} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z \Big| &= R \Big| \int_0^{\pi/4} \exp\Big\{-R^2 e^{2it}\Big\} e^{it}\,\mathrm{d}t \Big| \\ &\le R \int_0^{\pi/4} \Big| \exp\Big\{-R^2 e^{2it}\Big\} \Big|\,\mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

Für die weitere Abschätzung müssen wir das Integrationsintervall in Abhängigkeit von R in zwei Teile zerlegen. Sei $\delta = \delta(R)$ mit $\delta(R) \longrightarrow 0$ für $R \longrightarrow \infty$ (weiter unten wird $\delta(R)$ explizit gewählt). Insbesondere ist $\delta(R) < \dfrac{\pi}{4}$ für hinreichend große R, und für $t \in [0, \dfrac{\pi}{4} - \delta]$ gilt dann (wegen $0 \leq 2t \leq \dfrac{\pi}{2} - 2\delta$)

$$\cos 2t \;\geq\; \cos\Big(\frac{\pi}{2} - 2\delta\Big) \;=\; \sin 2\delta \;\geq\; 2\delta\frac{1}{\pi/2} \;=\; \frac{4\delta}{\pi}\,;$$

die letzte Ungleichung ergibt sich daraus, daß $\cos$ in $(0, \pi/2)$ oberhalb der Sekante zwischen 0 und $\pi/2$ verläuft. Da außerdem für $t \in [0, \pi/4]$ gilt $\operatorname{Re}(-R^2 e^{2it}) \leq 0$, folgt hiermit

$$\begin{aligned}
\Big|\int\limits_{\Gamma_2} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z\Big| \quad &\leq \quad R\int\limits_0^{\pi/4-\delta} \Big|\exp\Big\{-R^2(\cos 2t + i\sin 2t)\Big\}\Big|\,\mathrm{d}t + R\int\limits_{\pi/4-\delta}^{\pi/4} 1\,\mathrm{d}t \\
&\leq \quad R\int\limits_0^{\pi/4-\delta} \exp\Big\{-R^2\frac{4\delta}{\pi}\Big\}\,\mathrm{d}t + R\delta \\
&\leq \quad R\frac{\pi}{4}\exp\Big\{-R^2\frac{4\delta}{\pi}\Big\} + R\delta \\
&\longrightarrow \quad 0 \qquad \text{für} \quad R \longrightarrow \infty, \quad \text{falls z.B. } \delta = \delta(R) := R^{-3/2}\,.
\end{aligned}$$

Insgesamt haben wir somit erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \quad &= \quad \lim_{R\to\infty}\int\limits_{\Gamma_3} \exp(-z^2)\,\mathrm{d}z = \lim_{R\to\infty}\int\limits_0^R \exp\Big(-t^2 e^{i\pi/2}\Big)e^{i\pi/4}\,\mathrm{d}t \\
&= \quad \lim_{R\to\infty}\int\limits_0^R e^{i\pi/4}e^{-it^2}\,\mathrm{d}t \;=\; \lim_{R\to\infty}\int\limits_0^R \frac{1}{\sqrt{2}}\,(1+i)\,(\cos t^2 - i\sin t^2)\,\mathrm{d}t \\
&= \quad \lim_{R\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^R \Big\{\cos t^2 + \sin t^2 + i(\cos t^2 - \sin t^2)\Big\}\,\mathrm{d}t\,.
\end{aligned}$$

Zerlegung in Real– und Imaginärteil liefert die Existenz und die Werte der folgenden uneigentlichen Integrale

$$\int\limits_0^\infty (\cos t^2 + \sin t^2)\,\mathrm{d}t \quad = \quad \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,,$$

$$\int_0^\infty (\cos t^2 - \sin t^2)\,\mathrm{d}t \;=\; 0\,.$$

Durch Addition bzw. Subtraktion der beiden Gleichungen erhalten wir

$$\int_0^\infty \cos t^2\,\mathrm{d}t \;=\; \int_0^\infty \sin t^2\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,.$$

Die Substitution $t = \sqrt{s}$ liefert schließlich

$$\int_0^\infty \frac{\cos s}{\sqrt{s}}\,\mathrm{d}s \;=\; \int_0^\infty \frac{\sin s}{\sqrt{s}}\,\mathrm{d}s \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,.$$

Diese Integrale werden ***Fresnel–Integrale*** genannt und spielen in der Theorie der Lichtbeugung eine Rolle. #

12.4 Übungsaufgaben

12.1 Man berechne das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^\infty (x^2 - 2ix - 1)^{-1}\,\mathrm{d}x$$

mit Hilfe des Integrals über $\Gamma_R := \{$Strecke von $-R$ nach $R\} + \{$Kreisbogen mit Radius R um 0 in der unteren Halbebene von R nach $-R\}$.

12.2 a) Sei $\mathbb{C}_- = \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$. Ist $z \in \mathbb{C}_-$ und Γ ein beliebiger Weg in $\mathbb{C}_-$ von 1 nach z, so gilt

$$\int_\Gamma \frac{1}{\xi}\,\mathrm{d}\xi \;=\; \ln z \qquad (\textit{\textbf{Hauptwert}})\,.$$

b) Ist Γ ein Weg in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ von 1 nach z, der die Halbachse $(-\infty, 0]$ n–mal von oben nach unten und m–mal von unten nach oben überschreitet, so gilt

$$\int_\Gamma \frac{1}{\xi}\,\mathrm{d}\xi \;=\; \ln z + 2(n-m)\pi i\,.$$

13 Die Cauchy'sche Integralformel

Hauptziel dieses Abschnitts ist der Beweis der Cauchy'schen Integralformel, die besagt, daß man eine holomorphe Funktion innerhalb einer geschlossenen Kurve vollständig kennt, wenn man sie auf der Kurve selbst kennt. Aus der Cauchy'schen Integralformel ergeben sich weitere wichtige Eigenschaften, insbesondere die Mittelwerteigenschaften, die Tatsache, daß jede holomorphe Funktion beliebig oft (stetig) differenzierbar ist, und daß Grenzwerte (lokal) gleichmäßig konvergenter Folgen holomorpher Funktionen wieder holomorph sind.

13.1 Die Cauchy'sche Integralformel

Satz 13.1 *Sei* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *offen,* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *holomorph,* $z \in \Omega$. *Dann gilt für jede geschlossene Kurve* Γ *in* Ω *um* z, *deren Inneres ganz in* Ω *liegt und die* z *genau einmal in positiver Richtung umläuft, die* ***Cauchy'sche Integralformel***

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta \, .$$

Beweis. Da Ω offen ist, gibt es ein $\delta > 0$ so, daß alle Kreiswege Γ_r mit $0 < r \leq \delta$ um z mit der Parameterdarstellung

$$\gamma_r : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_r(t) = z + re^{it}$$

einschließlich ihres Inneren ganz in Ω liegen. Γ ist bezüglich $\Omega \backslash \{z\}$ homotop zu all diesen Γ_r (die natürlich untereinander homotop sind). Es gilt also für jedes $r \in (0, \delta]$

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta = \int\limits_{\Gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta = \int\limits_{\Gamma_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta + f(z) \int\limits_{\Gamma_r} \frac{1}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta \, .$$

Das zweite Integral auf der rechten Seite ist nach Beispiel **??** gleich $2\pi i$ für alle $r > 0$; das erste läßt sich abschätzen durch

$$\Big| \int\limits_{\Gamma_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta \Big| \leq 2\pi r \frac{1}{r} \max \Big\{ |f(\zeta) - f(z)| : |\zeta - z| = r \Big\}$$

und strebt somit gegen 0 für $r \longrightarrow 0$. Da die linke Seite nicht von r abhängt, ist diese also gleich $2\pi i f(z)$. □

Satz 13.2 (Mittelwerteigenschaft) *Sei* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *offen,* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *holomorph,* $z \in \Omega$. *Dann gilt für jedes* $r > 0$ *mit* $\overline{K}(z,r) \subset \Omega$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+re^{it})\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(z+re^{2\pi is})\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{\pi r^2}\int_{|\zeta-z|\le r} f(x+iy)\,\mathrm{d}(x,y) \qquad (\zeta = x+iy)\,; \end{aligned}$$

die Integrale der ersten Zeile stellen den ***Mittelwert*** *von* f ***über die Kreislinie*** $|\zeta - z| = r$ *dar, das Integral der zweiten Zeile den* ***Mittelwert*** *von* f ***über die Kreisscheibe*** $|\zeta - z| \le r$.

Beweis. Aus der Cauchy'schen Integralformel folgt für $\Gamma_r = \left\{re^{it} : 0 \le t \le 2\pi\right\}$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z+re^{it})}{re^{it}} rie^{it}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+re^{it})\,\mathrm{d}t\,, \end{aligned}$$

und mit der Substitution $t = 2\pi s$ die zweite Formel der ersten Zeile.

Wir wenden nun diese Formel für alle $\varrho \le r$ an und erhalten

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z)\frac{2}{r^2}\int_0^r \varrho\,\mathrm{d}\varrho = \frac{2}{r^2}\int_0^r \varrho f(z)\,\mathrm{d}\varrho \\ &\qquad \text{(mit } f(z) \text{ als Mittel über die Kreislinie } \Gamma_\varrho\text{)} \\ &= \frac{1}{\pi r^2}\int_0^r \varrho \int_0^{2\pi} f(z+\varrho e^{it})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\varrho \\ &\qquad \text{(Polarkoordinaten } (\varrho,t) \text{ für } (x,y)\text{)} \\ &= \frac{1}{\pi r^2}\int_{|\zeta-z|\le r} f(x+iy)\,\mathrm{d}(x,y) \end{aligned}$$

□

Korollar 13.3 *Ist* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *offen und* $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *harmonisch (d. h.* $\Delta u = 0$*), so erfüllt* u *die in Satz* **??** *formulierten Mittelwerteigenschaften. Dies folgt aus der Tatsache,* *daß nach Satz* **??** u *der Realteil einer holomorphen Funktion* $f = u + iv : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *ist. Bildet man in den Mittelwertformeln für* f *den Realteil, so folgt die Mittelwerteigenschaft für* u. *(Das Resultat gilt auch für harmonische Funktionen auf* $\mathbb{R}^m$ *mit* $m \neq 2$. *Für* $m = 1$ *ist dies trivial, da dort jede harmonische Funktion affin ist (Beweis!); für* $m > 2$ *werden ganz andere Methoden benötigt.)*

Satz 13.4 *Sei* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *offen,* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *holomorph,* K *ein „Kreis“ im Sinne von §10 (Kreis oder Gerade). Ist* $f(z) \in K$ *für alle* $z \in \Omega$, *so ist* f *konstant in jeder Zusammenhangskomponente von* Ω.

Beweis. Es gibt eine Möbiustransformation g (vgl. §10), die K auf $\mathbb{R}$ abbildet (eine spezielle Gerade in $\mathbb{C}$). Dann hat

$$F := g \circ f$$

die Eigenschaften

$$F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{holomorph,} \qquad F(z) \in \mathbb{R} \quad \text{für alle} \quad z \in \Omega\,,$$

wobei wir o. E. auch noch annehmen dürfen, daß gilt

$$F(z_o) \neq 0\,.$$

Es genügt zu zeigen, daß $F'(z) = 0$ für alle $z \in \Omega$ gilt; dann ist F und somit auch $f = g^{-1} \circ F$ konstant. Nehmen wir an, daß ein $z_0 \in \Omega$ existiert mit $F'(z_0) \neq 0$. Dann gilt für alle $z \in \Omega$

$$F(z) = F(z_0) + F'(z_0)\,(z - z_0) + \varphi(z_0, z)$$

mit $(z - z_0)^{-1}\,\varphi(z_0, z) \longrightarrow 0$ für $z \longrightarrow z_0$. Wählen wir $w := i\dfrac{F(z_0)}{F'(z_0)}$, so gilt für hinreichend kleine $t > 0$

$$F(z_0 + tw) = F(z_0)\left\{1 + it + \frac{\varphi(z_0, z_0 + tw)}{F(z_0)}\right\}.$$

Wegen $\dfrac{1}{t}\varphi(z_0, z_0 + tw) \longrightarrow 0$ für $t \longrightarrow 0$ ist dieser Wert nicht reell für hinreichend kleine t, ein Widerspruch zu $F(z) \in \mathbb{R}$. □

13.2 Das Maximum–Prinzip

Satz 13.5 (Maximum–Prinzip) *Sei* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *offen,* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *holomorph.*

a) Ist $\overline{K}(z,r) \subset \Omega$ *und gilt*

$$|f(z)| = \max\Big\{|f(\zeta)| \,:\, |\zeta - z| \leq r\Big\},$$

so ist f *konstant in* $\overline{K}(z,r)$ *.*

b) Ist Ω *zusammenhängend und* f *nicht konstant, so besitzt* $|f|$ *in* Ω *kein (globales) Maximum.*

Beweis. a) Wir nehmen an, daß f auf $K(z,r)$ nicht konstant ist. Dann ist auch $|f|$ nicht konstant auf $K(z,r)$ (denn sonst würden alle Werte von f auf einem Kreis liegen, und nach Satz **??** wäre dann auch f konstant). Es ist also $|f(\zeta)| \leq |f(z)|$ für $\zeta \in K(z,r)$, aber nicht überall $|f(\zeta)| = |f(z)|$. Deshalb gilt

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= \frac{1}{\pi r^2}\Big| \int\limits_{|\zeta - z| \leq r} f(x+iy)\,\mathrm{d}(x,y)\Big| \\
&\leq \frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{|\zeta - z| \leq r} |f(x+iy)|\,\mathrm{d}(x,y) \\
&< \max\Big\{|f(\zeta)| : |\zeta - z| \leq r\Big\} = |f(z)|,
\end{aligned}$$

ein Widerspruch.

b) Nehmen wir an, es gibt ein $z_0 \in \Omega$ mit $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ für alle $z \in \Omega$. Da $|f|$ in Ω nicht konstant ist (das folgt wie in Teil a), gibt es ein $z_1 \in \Omega$ mit

$$|f(z_1)| < |f(z_0)|.$$

Wir wählen eine Kurve Γ in Ω mit Parameterdarstellung $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$, Anfangspunkt $\gamma(0) = z_0$ und Endpunkt $\gamma(1) = z_1$. Dann existiert ein $t_0 \in [0,1)$ mit

$$|f(\gamma(t_0))| = |f(z_0)|,$$

$$|f(\gamma(t))| < |f(z_0)| \qquad \text{für} \quad t \in (t_0, 1].$$

Ist $r > 0$ so, daß $K(\gamma(t_0), r) \subset \Omega$ gilt, so nimmt $|f|$ in $K(\gamma(t_0), r)$ sein Maximum im Zentrum $\gamma(t_0)$ an, obwohl f nicht konstant ist. Nach Teil a) ist das ein Widerspruch. □

Bemerkung 13.6 a) Ist Ω **nicht** zusammenhängend, so kann f auf den verschiedenen Zusammenhangskomponenten (z. B.) dem Betrag nach verschiedene konstante Werte annehmen. In diesem Fall würde $|f|$ tatsächlich sein Maximum in Ω annehmen, ohne konstant zu sein.

b) Ist Ω zusammenhängend, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph und nicht–konstant, $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \Omega$, so liefert die Anwendung des Maximum–Prinzips auf $\frac{1}{f}$, daß $|f|$ in Ω sein Minimum nicht annimmt.

c) Tatsächlich nimmt der Betrag einer nicht–konstanten Funktion f auf einem zusammenhängendem Gebiet im Innern des Gebietes auch kein lokales Maximum an: Auf einem „kleinen“ Kreis um diesen Punkt wäre dies ein globales Maximum, d. h. in diesem Kreis wäre $f'(z) \equiv 0$. Nach dem Identitätssatz, Satz **??**, wäre dann f konstant.

d) Ist Ω zusammenhängend und gilt für eine Folge (z_n) aus Ω

$$|f(z_n)| \longrightarrow \sup \Big\{ |f(z)| \ : \ z \in \Omega \Big\} ,$$

so ist (z_n) in Ω nicht konvergent; ein eventueller Grenzwert könnte nur Randpunkt von Ω sein.

13.3 Höhere Ableitungen holomorpher Funktionen

In diesem Abschnitt gelingt es nun (endlich) zu zeigen, daß jede holomorphe Funktion f nicht nur **stetig** differenzierbar, sondern sogar **beliebig oft stetig differenzierbar** ist. Dies liegt nahe, da in der Cauchy'schen Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta$$

die Abhängigkeit von z auf der rechten Seite „sehr einfach“ zu sein scheint. Es stellt sich lediglich die Frage, ob die Differentiation nach z mit der Integration über ζ vertauschbar ist. Formal erhält man jedenfalls sofort:

Satz 13.7 (Cauchy–Formel für Ableitungen) *Sei* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *offen,* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *holomorph. Dann sind auch* $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, $f^{(3)}, \ldots$ *holomorph, und es gilt*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \, d\zeta \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

für jede zu einem hinreichend kleinen Kreis Γ_r *um* z *bezüglich* $\Omega \backslash \{z\}$ *homotope Kurve* Γ *(vgl. Satz* **??***).*

Der Beweis diese Satzes ergibt sich mit Hilfe der Cauchy'schen Integralformel (Satz **??**) unmittelbar aus dem folgenden Satz.

Satz 13.8 *Sei* Γ *eine beliebige Kurve (endlicher Länge) in* $\mathbb{C}$ *,* $g : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$ *stetig. Dann ist für jedes* $n \in \mathbb{N}_0$ *die Funktion*

$$f_n(z) := \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \, d\zeta$$

in $\mathbb{C} \backslash \Gamma$ *holomorph und es gilt*

$$f_n'(z) = f_{n+1}(z) \quad (f_n(z) = f_0^{(n)}(z)) \qquad \text{für} \quad z \in \mathbb{C} \backslash \Gamma, \ n \in \mathbb{N}_0 \, .$$

Die Funktionen f_n *sind also beliebig oft stetig komplex differenzierbar.*

Beweis. Es ist lediglich zu zeigen, daß für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und jedes $z \in \mathbb{C} \backslash \Gamma$ gilt

$$\lim_{w \to z} \frac{f_n(w) - f_n(z)}{w - z} = f_{n+1}(z) \, .$$

Dann ist nämlich f_n komplex differenzierbar (holomorph) und $f_n' = f_{n+1}$; da auch f_{n+1} wieder differenzierbar ist, usw., ist jedes f_n beliebig oft differenzierbar. Zunächst gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\zeta - w)^{n+1}} - \frac{1}{(\zeta - z)^{n+1}} &= \frac{(\zeta - z)^{n+1} - (\zeta - w)^{n+1}}{(\zeta - w)^{n+1} (\zeta - z)^{n+1}} \\ & \quad (\text{mit} \quad a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b)\,(a^n + a^{n-1} b + \ldots + b^n)\,) \\ &= \Big\{ (\zeta - z) - (\zeta - w) \Big\} \frac{(\zeta - z)^n + (\zeta - z)^{n-1} (\zeta - w) + \ldots + (\zeta - w)^n}{(\zeta - w)^{n+1} (\zeta - z)^{n+1}} \\ &= (w - z) \frac{(\zeta - z)^n + (\zeta - z)^{n-1} (\zeta - w) + \ldots + (\zeta - w)^n}{(\zeta - w)^{n+1} (\zeta - z)^{n+1}} \, . \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für den Differenzenquotienten

$$\frac{f_n(w) - f_n(z)}{w - z} = \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma g(\zeta) \frac{(\zeta - z)^n + (\zeta - z)^{n-1}(\zeta - w) + \ldots + (\zeta - w)^n}{(\zeta - w)^{n+1}(\zeta - z)^{n+1}} \, \mathrm{d}\zeta \, .$$

Den Bruch unter dem Integral untersuchen wir wie folgt:

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{(\zeta - z)^n + (\zeta - z)^{n-1}(\zeta - w) + \ldots + (\zeta - w)^n}{(\zeta - w)^{n+1}(\zeta - z)^{n+1}} - \frac{n+1}{(\zeta - z)^{n+2}} \right| \\
&\leq \sum_{j=0}^{n} \left| \frac{(\zeta - z)^{(n-j)}(\zeta - w)^j}{(\zeta - w)^{n+1}(\zeta - z)^{n+1}} - \frac{1}{(\zeta - z)^{n+2}} \right| \\
&= \sum_{j=0}^{n} \left| \frac{1}{(\zeta - w)^{n+1-j}(\zeta - z)^{j+1}} - \frac{1}{(\zeta - z)^{n+2}} \right| \\
&= \sum_{j=0}^{n} \left| \frac{(\zeta - z)^{n+1-j} - (\zeta - w)^{n+1-j}}{(\zeta - w)^{n+1-j}(\zeta - z)^{n+2}} \right| \\
&\qquad \text{(wieder mit } a^{k+1} - b^{k+1} = (a - b)\,(a^k + a^{k-1}b + \ldots + b^n)\,\text{)} \\
&\leq |z - w| \sum_{j=0}^{n} \frac{|\zeta - z|^{n-j} + |\zeta - z|^{n-j-1}|\zeta - w| + \ldots + |\zeta - w|^{n-j}}{|\zeta - w|^{n+1-j}|\zeta - z|^{n+2}} \, .
\end{aligned}$$

Für (festes) $z \in \mathbb{C}\backslash\Gamma$, $w \in K(z, \varrho)$ mit $K(z, 2\varrho) \cap \Gamma = \emptyset$, ist die Summe gleichmäßig beschränkt auf Γ; also konvergiert der gesamte Integrand für $w \longrightarrow z$ gleichmäßig auf Γ gegen $g(\zeta)\,(\zeta - z)^{-n-2}$. Der Grenzübergang $w \longrightarrow z$ kann also mit dem Integral vertauscht werden: (Wir haben den hier benutzten Satz „bei gleichmäßiger Konvergenz ist der Grenzübergang mit der Integration vertauschbar" für komplexe Kurvenintegrale nicht explizit bewiesen; schreibt man das Integral mit Hilfe einer Parameterdarstellung und zerlegt dann in Real– und Imaginärteil, so folgt die Behauptung aus der rellen Analysis.)

$$\lim_{w \to z} \frac{f_n(w) - f_n(z)}{w - z} = \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+2}} \, \mathrm{d}\zeta = f_{n+1}(z) \, . \qquad \square$$

Satz 13.9 (Satz von Morera) *Sei* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *offen und* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *stetig. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) f *ist holomorph in* Ω *,*

(ii) das Kurvenintegral über jeden bezüglich Ω nullhomotopen Weg in Ω verschwindet.

Beweis. **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii):** Das ist der Cauchy'sche Integralsatz (Satz **??**).

(ii) $\Longrightarrow$ **(i):** Es genügt zu zeigen, daß zu jedem $z_0 \in \Omega$ ein $\varrho > 0$ existiert so, daß f in $K(z_0, \varrho)$ holomorph ist (Holomorphie ist eine ***lokale Eigenschaft***). Sei $\varrho > 0$ so, daß $K(z_0, \varrho) \subset \Omega$ gilt. Wir definieren

$$F : K(z, \varrho) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad F(z) := \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\,,$$

wobei das Integral über einen beliebigen Weg in $K(z_0, \varrho)$ von z_0 nach z zu erstrecken ist; da $K(z_0, \varrho)$ einfach zusammenhängend ist, sind alle diese Wege zueinander homotop und somit ist nach Voraussetzung das Integral unabhängig von der Wahl des Weges; also ist F wohldefiniert. Wie im Beweis von Satz **??** folgt, daß F komplex differenzierbar ist mit $F' = f$. Da F beliebig oft differenzierbar ist, ist also auch $f = F'$ differenzierbar (holomorph). □

13.4 Kompakte Konvergenz

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und (f_n) eine Folge von Funktionen $\Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. Die Folge (f_n) heißt ***kompakt konvergent*** in Ω (man könnte auch sagen ***lokal gleichmäßig konvergent***), wenn sie in jeder kompakten Teilmenge von Ω gleichmäßig konvergiert, d. h. wenn gilt: Zu jeder kompakten Teilmenge $K \subset \Omega$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 = n_0(\varepsilon, K)$ mit

$$|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon \qquad \text{für alle} \quad n, m \geq n_0, \quad z \in K\,.$$

Satz 13.10 *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, (f_n) eine Folge von in Ω holomorphen Funktionen, die in Ω kompakt konvergent ist. Dann gilt:*

a) Die Grenzfunktion $f(z) := \lim_{n\to\infty} f_n(z)$ ist ebenfalls in Ω holomorph.

b) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist auch die Folge der k–ten Ableitungen $(f_n^{(k)})$ in Ω kompakt konvergent gegen $f^{(k)}$.

c) Ist $\Omega' \subset \Omega$ offen (eventuell $\Omega' = \Omega$) und ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ F_n in Ω' eine Stammfunktion von f_n so, daß $\lim_{n\to\infty} F_n(z_0)$ existiert für ein $z_0 \in \Omega'$, so ist die Folge (F_n) in Ω' kompakt konvergent gegen eine Stammfunktion F von f mit $F(z_0) = \lim_{n\to\infty} F_n(z_0)$.

Beweis. a) Sei Γ eine geschlossene, bezüglich Ω nullhomotope Kurve in Ω. Dann ist die Punktmenge Γ eine kompakte Teilmenge von Ω und somit ist (f_n) gleichmäßig konvergent auf Γ. Daraus folgt

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\Gamma \lim_{n\to\infty} f_n(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty} \int_\Gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z = 0\,.$$

Mit dem Satz von Morera folgt die Holomorphie von f.

b) Es genügt zu zeigen: Für jedes $z_0 \in \Omega$ existiert ein $\varrho > 0$ so, daß die Folge $(f_n^{(k)})$ in $K(z_0, \varrho)$ gleichmäßig gegen $f^{(k)}$ konvergiert (jede kompakte Teilmenge von Ω läßt sich durch endlich viele dieser Kreisscheiben überdecken). Zu $z_0 \in \Omega$ wählen wir $\delta > 0$ so, daß $K(z_0, \delta) \subset \Omega$ ist. Dann gilt für jedes $\varrho < \delta$, wobei Γ_ϱ die Kreislinie mit Radius ϱ um z_0 ist,

$$f_n^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,\mathrm{d}\zeta \qquad \text{für} \quad z \in K(z_0, \varrho)\,.$$

Da (f_n) auf Γ_ϱ gleichmäßig gegen f konvergiert, und da $(\zeta - z)^{-k-1}$ auf Γ_ϱ beschränkt ist, kann der Grenzübergang $n \longrightarrow \infty$ mit der Integration vertauscht werden, d. h. es gilt

$$f_n^{(k)}(z) \longrightarrow \frac{k!}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,\mathrm{d}\zeta = f^{(k)}(z)\,;$$

die letzte Gleichung folgt aus der Cauchy'schen Integralformel für Ableitungen, da f nach Teil a) holomorph ist. Für jedes $\varrho' < \varrho$ ist diese Konvergenz gleichmäßig auf $\overline{K}(z_0, \varrho')$, denn für $z \in \overline{K}(z_0, \varrho')$ gilt

$$\left| \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} \right| \le \left| \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\varrho - \varrho')^{k+1}} \right| \longrightarrow 0$$

gleichmäßig bezüglich $\zeta \in \Gamma_\varrho$, wobei die Abschätzung von $z \in \overline{K}(z_0, \varrho')$ unabhängig ist.

c) Sei $A := \lim\limits_{n\to\infty} F_n(z_0)$,

$$F(z) := A + \int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = A + \lim_{n\to\infty} \int\limits_{z_0}^{z} f_n(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\,,$$

wobei auf Grund der Holomorphie die Integrale wegunabhängig sind. Ist $z_1 \in \Omega'$ und $K(z_1, \varrho) \subset \Omega'$, so gilt für $z \in K(z_1, \varrho)$

$$\begin{aligned}
|F_n(z) - F(z)| &= \left|F_n(z_1) - F(z_1) + \int\limits_{z_1}^{z} (f_n(\zeta) - f(\zeta))\,\mathrm{d}\zeta\right| \\
&\le \quad |F_n(z_1) - F(z_1)| + \left|\int\limits_{z_1}^{z} (f_n(\zeta) - f(\zeta))\,\mathrm{d}\zeta\right| \\
&\le \quad \left|\int\limits_{z_0}^{z_1} (f_n(\zeta) - f(\zeta))\,\mathrm{d}\zeta\right| + |z - z_1| \max\Big\{|f_n(\zeta) - f(\zeta)| : |\zeta - z_1| \le \varrho\Big\} \\
&\longrightarrow \quad 0 \qquad \text{gleichmäßig auf} \quad K(z_1, \varrho)\,.
\end{aligned}$$

Daraus folgt mit der Überdeckungseigenschaft die gleichmäßige Konvergenz auf jeder kompakten Teilmenge von Ω'. □

Wir sind nun in der Lage, eine überraschende Verschärfung des Satzes von Arzela–Ascoli bereits zu beweisen, wobei hier die Forderung der gleichgradigen Stetigkeit entfällt (sie ergibt sich bereits aus der Beschränktheit).

Satz 13.11 (Satz von Montel) *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph und (f_n) lokal beschränkt (d. h. zu jeder kompakten Teilmenge $K \subset \Omega$ existiert ein $C \ge 0$ mit $|f_n(z)| \le C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $z \in K$). Dann enthält (f_n) eine kompakt konvergente Teilfolge.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß zu jedem $z_0 \in \Omega$ ein $\varrho > 0$ existiert so, daß die Folge (f_n) auf $\overline{K}(z_0, \varrho)$ gleichgradig stetig ist: Ist K eine beliebige kompakte Teilmenge von Ω, so kann K durch endlich viele Kreise dieser Art $\overline{K}(z_1, \varrho_1), \ldots, \overline{K}(z_m, \varrho_m)$ überdeckt werden. Mit Hilfe des Satzes von Arzela–Ascoli kann man dann in m Schritten eine Teilfolge von (f_n) auswählen, die auf $\bigcup_{j=1}^{m} \overline{K}(z_j, \varrho_j)$, und somit auf K, gleichmäßig konvergiert.

Sei nun $z_0 \in \Omega$, $\varrho' > 0$ so, daß $\overline{K}(z_0, \varrho') \subset \Omega$ gilt, $\varrho := \varrho'/2$. Dann gilt nach der Cauchy'schen Integralformel für die ersten Ableitungen

$$|f_n'(z)| = \frac{1}{2\pi}\left| \int\limits_{\Gamma'_\varrho} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, \mathrm{d}\zeta \right| \le C(z_0, \varrho') \frac{\varrho'}{\varrho' - \varrho} \quad \text{für} \quad z \in \overline{K}(z_0, \varrho).$$

Das ist die Beschränktheit der Folge (f_n') auf $\overline{K}(z_0, \varrho)$, woraus in bekannter Weise die gleichgradige Stetigkeit folgt. □

13.5 Der Fundamentalsatz der Algebra

Es ist jetzt nicht mehr schwierig einen ersten (funktionentheoretischen) Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra anzugeben, den wir bereits mehrfach verwendet haben. Ein weiterer Beweis wird mit Hilfe des Ersten Liouville'schen Satzes möglich sein (vgl. Korollar **??**).

Satz 13.12 (Fundamentalsatz der Algebra) *a) Jedes nicht–konstante Polynom p (d. h. $\deg p \ge 1$) hat mindestens eine Nullstelle.*

b) Jedes Polynom $p(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ vom $\deg n$ (d. h. $a_n \neq 0$) läßt sich schreiben in der Form

$$p(z) = a_n \prod_{j=1}^{r} (z - z_j)^{m_j},$$

wobei die komplexen Zahlen z_j, die Nullstellen von p, bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt sind, $m_j \in \mathbb{N}$, $n = m_1 + \ldots + m_r$.

Beweis. a) Wir nehmen an, daß $p(\cdot)$ keine Nullstelle hat. Dann ist

$$q(z) := \frac{1}{p(z)} \quad \text{in ganz} \quad \mathbb{C} \quad \text{holomorph.}$$

Aus $p(z) = z^n(a_0 z^{-n} + a_1 z^{1-n} + \ldots + a_{n-1} z^{-1} + a_n)$ für $z \neq 0$ folgt wegen

$$a_0 z^{-n} + a_1 z^{1-n} + \ldots + a_{n-1} z^{-1} + a_n \longrightarrow a_n \neq 0 \qquad \text{für} \quad |z| \longrightarrow \infty$$

offenbar

$$|p(z)| \longrightarrow \infty \qquad \text{für} \quad |z| \longrightarrow \infty\,.$$

Wenden wir das Maximum–Prinzip (Satz **??**), auf $K(0,R)$ an, so folgt damit

$$\max\Big\{|q(z)| : |z| \leq R\Big\} \;=\; \max\Big\{|q(z)| : |z| = R\Big\} \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad R \longrightarrow \infty\,.$$

Daraus ergibt sich $q(z) \equiv 0$, was mit der Definition $q(z) = 1/p(z)$ nicht vereinbar ist.

b) Sei z_1 eine Nullstelle von p. Polynomdivision durch $(z - z_1)$ liefert

$$\begin{aligned} p(z) : (z - z_1) &= a_n\Big(z^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} z^{n-1} + \ldots + \frac{a_0}{a_n}\Big) : (z - z_1) \\ &= a_n(z^{n-1} + \ldots) + R_1 : (z - z_1) \quad (R_1 \in \mathbb{C}) \\ &= a_n\, p_{n-1}(z) + R_1 : (z - z_1) \end{aligned}$$

mit $\deg p_{n-1} = n - 1$, also

$$p(z) \;=\; a_n p_{n-1}(z)\,(z - z_1) \;+\; R_1\,.$$

Für $z = z_1$ verschwindet die linke Seite und der erste Term auf der rechten Seite; also ist $R_1 = 0$, d. h. es gilt

$$p(z) \;=\; a_n\, p_{n-1}(z)\,(z - z_1)\,.$$

Ist $n - 1 \geq 1$, so kann das gleiche Verfahren auf p_{n-1} angewandt werden; n–fache Anwendung des Verfahrens liefert

$$p(z) \;=\; a_n(z - z_1)\,(z - z_2)\,\ldots\,(z - z_n)\,.$$

Zusammenfassung der Terme mit gleichen Nullstellen z_j liefert die behauptete Darstellung.

Die z_j sind dadurch eindeutig bestimmt, daß es genau die Nullstellen von $p(\cdot)$ sind. Die m_j geben an, wie oft $p(\cdot)$ ohne Rest durch die Faktoren $(z - z_j)$ dividiert werden kann. □

13.6 Übungsaufgaben

13.1 Man berechne $\displaystyle\int_{\Gamma_k} (z^2+9)^{-1}\,\mathrm{d}z \quad (k = 1,\,2,\,3)$ für

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \text{ Kreis mit Radius } 1 \text{ um } 3i\,,\\ \Gamma_2 &= \text{ Kreis mit Radius } 1 \text{ um } -3i\,,\\ \Gamma_3 &= \text{ Kreis mit Radius } 4 \text{ um } 0\end{aligned}$$

(Partialbruchzerlegung).

13.2 Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \Omega$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig und holomorph in $\Omega\backslash\{z_0\}$; dann ist $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph.
(Man benutze den Satz von Morera; dabei genügt es z. B. zu zeigen, daß Integrale über Dreieckswege in $K(z_0, r) \subset \Omega$ verschwinden.)

13.3 Seien $f_n : K(z_0, r) \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph $(n \in \mathbb{N})$ und

$$\int_{K(z_0,r)} \big|f_n(x+iy) - f_m(x+iy)\big|\,\mathrm{d}(x,y) \longrightarrow 0 \qquad \text{für} \quad n, m \longrightarrow \infty\,.$$

Dann ist für jedes $\varrho < r$ die Folge (f_n) in $K(z_0, \varrho)$ gleichmäßig konvergent.

13.4 Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph.

a) Ist Ω zusammenhängend und nimmt $\operatorname{Re} f$ oder $\operatorname{Im} f$ in Ω sein Supremum an, so ist f konstant.

b) Sei A eine kompakte Teilmenge von Ω. Ist $|f|$ auf dem Rand von A konstant, so ist f konstant oder f besitzt eine Nullstelle in A. (Es ist nützlich, auch die Funktion $\dfrac{1}{f}$ zu betrachten.)

13.5 Man beweise

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^{R} \frac{e^{ixt}}{i-t}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} -e^{-x} & \text{für } x > 0\,,\\ -\dfrac{1}{2} & \text{für } x = 0\,,\\ 0 & \text{für } x < 0\,.\end{cases}$$

Anleitung: Für $x > 0$ betrachte man den geschlossenen Integrationsweg von $-R$ auf der reellen Achse nach $+R$ und auf dem Kreisbogen um 0 in der oberen Halbebene zurück nach $-R$; man zeige, daß das Integral über den Bogen für $R \longrightarrow \infty$ gegen 0 strebt. — Für $x < 0$ benutze man den Bogen in der unteren Halbebene.

13.6 Sei f holomorph bei z_0, $f'(z_0) \neq 0$. Dann existiert eine offene Umgebung U von z_0, die bijektiv auf eine offene Menge $f(U)$ abgebildet wird. Die Umkehrfunktion g von $f : U \longrightarrow f(U)$ ist ebenfalls holomorph und es gilt $g' = \dfrac{1}{f' \circ g}$.

13.7 Man berechne das Integral über den Kreis mit Radius 2 um 0 für die Funktionen

$$f(z) = \frac{1 - \exp z}{z(z^2+1)}, \qquad g(z) = \frac{\cos z}{z^2+1}.$$

14 Potenzreihenentwicklungen holomorpher Funktionen

14.1 Taylorentwicklung

Wir erinnern zunächst an einige Begriffe und Ergebnisse aus der Analysis I, die völlig unverändert übernommen werden können, da wir sie schon dort im Komplexen formuliert hatten. Eine ***Potenzreihe*** hat die Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \qquad (z \in \mathbb{C})\,;$$

dabei heißt $z_0 \in \mathbb{C}$ der ***Entwicklungspunkt***, $a_n \in \mathbb{C}$ sind die ***Koeffizienten*** der Potenzreihe. Zur Erinnerung beweisen wir den folgenden Satz nochmals:

Satz 14.1 *Sei eine Potenzreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *gegeben,*

$$\varrho := \left\{ \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \right\}^{-1} \qquad (\textit{wobei } 0 \textit{ und } \infty \textit{ zugelassen sind}).$$

Dann ist die Potenzreihe absolut konvergent für jedes $z \in K(z_0, \varrho)$, *kompakt konvergent in* $K(z_0, \varrho)$, *divergent in* $\mathbb{C}\backslash\overline{K}(z_0, \varrho)$. ϱ *wird deshalb als Konvergenzradius bezeichnet; die Formel für* ϱ *heißt die* **Hadamard'sche Formel**. *(Auf dem Rand des Kreises,* $\partial K(z_0, \varrho) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \varrho\}$, *ist eine allgemeine Aussage nicht möglich: Man betrachte z. B. die Reihen* $\sum n^{-2}z^n$, $\sum n^{-1}z^n$, $\sum z^n$ *in* $K(0,1)$ *.)*

Beweis. Sei $\varrho' < \varrho$, $\varrho'' = \frac{1}{2}(\varrho' + \varrho)$, also $\frac{1}{\varrho''} > \frac{1}{\varrho}$. Wegen $\frac{1}{\varrho} = \limsup |a_n|^{1/n}$ gibt es dann ein $n_0 := n_0(\varrho'')$ mit

$$|a_n|^{1/n} \le \frac{1}{\varrho''} \qquad \text{für} \quad n \ge n_0\,.$$

Also gilt für $z \in \overline{K}(z_0, \varrho')$ und $n \ge N_0$

$$|a_n(z-z_0)^n|^{1/n} = |z-z_0|\,|a_n|^{1/n} \le \frac{\varrho'}{\varrho''} < 1\,.$$

Nach dem Wurzelkriterium ist also die Reihe in $\overline{K}(z_0, \varrho')$ absolut und gleichmäßig konvergent. Da dies für jedes $\varrho' < \varrho$ gilt, ist die Reihe in $K(z_0, \varrho)$ kompakt konvergent.

Sei nun $|z - z_0| > \varrho$. Da es eine Teilfolge (a_{n_k}) der Koeffizientenfolge gibt mit

$$|a_{n_k}|^{1/n_k} \longrightarrow \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \frac{1}{\varrho},$$

folgt

$$\Big|a_{n_k}(z - z_0)^{n_k}\Big|^{1/n_k} = |a_{n_k}|^{1/n_k}|z - z_0| \longrightarrow \frac{|z - z_0|}{\varrho} > 1 .$$

und somit

$$|a_{n_k}(z - z_0)^{n_k}| \longrightarrow \infty \qquad \text{für} \quad k \longrightarrow \infty .$$

Die Reihe kann also nicht konvergieren. □

Satz 14.2 *Die Potenzreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ *konvergiere in* $K(z_0, \varrho)$. *Die Funktion* f *sei definiert durch*

$$f : K(z_0, \varrho) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n .$$

Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ *und* $z \in K(z_0, \varrho)$

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\,\ldots\,(n-k+1)\,a_n\,(z - z_0)^{n-k},$$

d. h., man erhält die Potenzreihe für $f^{(k)}$*, indem man die Reihe für* f *gliedweise differenziert.*

Beweis. Mit Hilfe der Hadamard'schen Formel ist leicht zu sehen, daß die formal abgeleitete Reihe den gleichen Konvergenzradius hat, d. h. die Folge der Partialsummen der abgeleiteten Reihe konvergiert in jedem kleineren Kreis gleichmäßig. Daraus kann durch Grenzübergang unter dem Integral leicht geschlossen werden, daß die formal abgeleitete Reihe die Ableitung darstellt. — Wir können aber auch etwas eleganter vorgehen: In $K(z_0,\varrho)$ gilt im Sinne der kompakten Konvergenz

$$\sum_{n=0}^{m} a_n(z-z_0)^n \longrightarrow f(z)\,.$$

Mit Satz **??** folgt hieraus

$$\sum_{n=k}^{m} n(n-1)\,\ldots\,(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k} \;=\; \Big(\sum_{n=0}^{m} a_n\,(z-z_0)^n\Big)^{(k)} \longrightarrow f^{(k)}(z)\,,$$

ebenfalls im Sinne der kompakten Konvergenz in $K(z_0,\varrho)$. □

Satz 14.3 (Taylor–Entwicklung) *Sei f holomorph in Ω mit $K(z_0,r)\subset\Omega$. Dann gibt es genau eine Potenzreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \qquad \textbf{\textit{Taylor–Entwicklung um}} \quad z_0$$

mit Konvergenzradius $\varrho \geq r$, die für alle $z\in K(z_0,r)$ die Summe $f(z)$ hat. Es gilt

$$a_n \;=\; \frac{1}{n!}\,f^{(n)}(z_0) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta\,,$$

wobei Γ in $K(z_0,r)$ den Punkt z_0 genau einmal in positiver Richtung umläuft. — Für die Koeffizienten gilt die ***Cauchy'sche Abschätzung***

$$|a_n| \;\leq\; \eta^{-n}\max\Big\{|f(z)| \,:\, |z-z_0| \,=\, \eta\Big\} \quad \textit{für jedes } \eta\in(0,r)\,.$$

Beweis. Für $\eta\in(0,r)$ sei Γ_η der Kreis um z_0 mit Radius η (positiv orientiert),

$$a_n \;:=\; \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\eta} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta \;=\; \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\,,$$

wobei die letzte Gleichung die Cauchy'sche Integralformel für Ableitungen ist (Satz **??**). Abschätzung des Integrals durch Weglänge $\times$ Maximum des Integranden ergibt

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi\eta \frac{1}{\eta^{n+1}} \max\Big\{|f(\zeta)| \,:\, |\zeta - z_0| = \eta\Big\}$$

und somit die Cauchy'sche Abschätzung.

Mit der Hadamard'schen Formel (Satz **??**) folgt hieraus sofort $\varrho \geq \eta$ für jedes $\eta < r$, also $\varrho \geq r$; das ergibt sich aber auch implizit daraus, daß die angegebene Reihe für $z \in K(z_0, r)$ gegen $f(z)$ konvergiert, was im folgenden ohne Kenntnis des Konvergenzradius bewiesen wird.

Für $\zeta \in \Gamma_\eta$ mit $\eta < r$ und $z \in K(z_0, \eta)$ gilt

$$\left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| = \frac{|z - z_0|}{\eta} =: q_z < 1\,,$$

also (geometrische Reihe)

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n .$$

Diese Reihe hat (bei festem $z \in K(z_0, \eta)$) für alle $\zeta \in \Gamma_\eta$ die geometrische Reihe $\sum q_z^n$ als Majorante, ist also auf Γ_η gleichmäßig konvergent. Deshalb kann in der folgenden Rechnung der Grenzübergang in der Summe mit dem Integral vertauscht werden:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\eta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\eta} f(\zeta) \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n \mathrm{d}\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\eta} f(\zeta) \frac{1}{\zeta - z_0} \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n \mathrm{d}\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i} \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} \int_{\Gamma_\eta} f(\zeta) \frac{1}{\zeta - z_0} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n \mathrm{d}\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \int_{\Gamma_\eta} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, \mathrm{d}\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n\,,
\end{aligned}$$

mit oben erklärten a_n. Wegen

$$\begin{aligned} f^{(k)}(z_0) &= \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1)\,\ldots\,(n-k+1)\,(z_0-z_0)^{n-k} \\ &= k\,!\,a_k \qquad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

ist die Potenzreihe durch f eindeutig bestimmt. □

Korollar 14.4 *Ist ϱ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ und $r > \varrho$, so gibt es keine in ganz $K(z_0, r)$ holomorphe Funktion, die in $K(z_0, \varrho)$ mit der Reihe übereinstimmt. — Mit anderen Worten: Es gibt mindestens einen Randpunkt von $K(z, \varrho)$, über den hinaus die Funktion nicht holomorph fortsetzbar ist.*

Beispiel 14.5 Die Funktion

$$f : \mathbb{C}\backslash\{1\} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = \frac{1}{1-z}$$

ist offenbar holomorph und es gilt (geometrische Reihe)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{für} \quad z \in \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad |z| < 1\,.$$

Auf Grund der Eindeutigkeit der Taylorreihe ist dies die Taylorentwicklung von f um $z_0 = 0$. Diese Potenzreihe hat den Konvergenzradius 1; tatsächlich ist sie für **alle** z mit $|z| = 1$ divergent. #

Beispiel 14.6 Der Hauptwert des ***Logarithmus***

$$\ln : \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{C}$$

ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion, genauer, die Umkehrfunktion von

$$\exp : \Big\{ z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im} z < \pi \Big\} \longrightarrow \mathbb{C}\,.$$

Aus der Differentiationsregel für Umkehrfunktionen folgt wie im Reellen

$$\ln'(z) = (\exp^{-1})'(z) = \frac{1}{\exp'(\ln z)} = \frac{1}{\exp(\ln z)} = \frac{1}{z}\,.$$

Damit erhalten wir für die Koeffizienten der Taylorentwicklung um $z_0 = 1$:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{0!}\ln(1) = 0\,, \\ a_1 &= \frac{1}{1!}\ln'(1) = \frac{1}{z}\Big|_{z=1} = 1\,, \\ &\vdots \\ a_n &= \frac{1}{n!}\ln^{(n)}(1) = \frac{1}{n!}(-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{z^n}\Big|_{z=1} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}\,. \end{aligned}$$

Die Taylorentwicklung um $z_0 = 1$ lautet also

$$\ln z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n\,.$$

Sie hat den Konvergenzradius 1; für $z = 0$ ist sie z. B. divergent, für $z = 2$ dagegen konvergent. (Es sei dem Leser überlassen, noch einige weitere Punkte zu untersuchen). #

Für die Taylorreihen von exp, cos, sin, ... erhält man natürlich die aus der reellen Analysis bekannten Reihen. Darauf braucht hier nicht weiter eingegangen zu werden.

14.2 Folgerungen aus dem Taylor'schen Satz

Satz 14.7 (Identitätssatz) *a) Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ für $z \in K(z_0, r)$. Gilt $f(z_j) = 0$ für eine Folge (z_j) aus $K(z_0, r)\backslash\{0\}$ mit $z_j \longrightarrow z_0$, so gilt*

$$a_n = 0 \quad \textit{für alle} \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad \textit{also} \quad f(z) \equiv 0 \quad \textit{in} \quad K(z_0, r)\,.$$

b) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Hat die Nullstellenmenge $\{z \in \Omega : f(z) = 0\}$ einen Häufungspunkt in Ω, so gilt $f(z) \equiv 0$ in Ω.

Beweis. a) Wir beweisen $a_n = 0$ durch Induktion nach n.

$\mathbf{n = 0}$: Aus der Darstellung von f als Potenzreihe, und aus der Stetigkeit einer durch eine Potenzreihe dargestellten Funktion, ergibt sich

$$a_0 = f(z_0) = \lim_{j\to\infty} f(z_j) = 0\,.$$

$\mathbf{n} \Longrightarrow \mathbf{n+1}$: Die Induktionsannahme lautet also $a_m = 0$ für $m = 0, 1, \ldots, n$. Wir definieren

$$f_n(z) := \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-n-1} \qquad \text{für} \quad |z - z_0| < r\,;$$

für $z \in K(z_0, r) \backslash \{z_0\}$ ist offenbar (man beachte die Induktionsannahme)

$$f_n(z) = \Big\{ f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k (z - z_0)^k \Big\} (z - z_0)^{-n-1} = f(z)\,(z - z_0)^{-n-1}\,,$$

woraus sich die Konvergenz der Potenzreihe für f_n in $K(z_0, r)$ und somit die Stetigkeit von f_n im Punkt z_0 ergibt. Zusammen mit

$$f_n(z_j) = f(z_j)\,(z_j - z_0)^{-n-1} = 0$$

ergibt sich also (wie bei $n = 0$)

$$a_{n+1} = f_n(z_0) = \lim_{j \to \infty} f_n(z_j) = 0\,.$$

b) (i) Sei $z_0 \in \Omega$ ein Häufungspunkt der Nullstellenmenge von f, $\varrho > 0$ so, daß $K(z_0, \varrho) \subset \Omega$ gilt. Nach dem Taylor'schen Satz hat dann f eine Darstellung der Form

$$f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n \qquad \text{für} \quad z \in K(z_0, \varrho)\,.$$

Mit Teil a) folgt $f(z) \equiv 0$ in $K(z_0, \varrho)$.

(ii) Es bleibt zu zeigen: Ist $z \in \Omega$ beliebig, so gilt $f(z) = 0$. Da Ω zusammenhängend ist, gibt es eine Kurve Γ in Ω mit Anfangspunkt z_0 und Endpunkt z.

Sei $r > 0$ so, daß $K(w, r) \subset \Omega$ gilt für jedes $w \in \Gamma$ (für r kann man das Minimum der stetigen Funktion $d : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$, $d(w) = \inf\{|w - \zeta| : \zeta \in \mathbb{C} \backslash \Omega\}$ wählen; dieses ist positiv). Es gibt also endlich viele Punkte $z_1, \ldots, z_n := z$ so, daß die Kreise $K(z_j, \frac{r}{2})$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$ ganz Γ überdecken, d. h. bei geeignet gewählter Reihenfolge gilt

$$z_{j+1} \in K(z_j, r) \qquad \text{für} \quad j = 0, \ldots, n-1\,.$$

Nach (i) ist $f(w) \equiv 0$ in $K(z_0, r)$. Insbesondere ist z_1 Häufungspunkt der Nullstellen von f und somit $f(z) \equiv 0$ in $K(z_1, r)$. Induktiv erhält man so schließlich $f(w) \equiv 0$ in $K(z_n, r)$, also insbesondere $f(z) = 0$. Dieses Verfahren wird als Kreiskettenverfahren bezeichnet. $\square$

Korollar 14.8 *Sei* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *offen und zusammenhängend,* $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *holomorph.*

a) Gilt $f^{(n)}(z_0) = 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$ *und ein* $z_0 \in \Omega$ *, so gilt* $f(z) \equiv 0$ *in* Ω *.*

b) Hat die Menge $\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$ *einen Häufungspunkt in* Ω *, so gilt* $f(z) \equiv g(z)$ *in* Ω *.*

c) Stimmen f *und* g *auf einem Kurvenstück in* Ω *überein, so gilt* $f(z) \equiv g(z)$ *in* Ω *.*

Eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion wird als ***ganze Funktion*** bezeichnet. Ihre Taylorreihe um jeden Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ ist in ganz $\mathbb{C}$ konvergent (Konvergenzradius $= \infty$).

Satz 14.9 *Sei* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *eine ganze Funktion. Gibt es ein* $m \in \mathbb{N}$ *und ein* $C \geq 0$ *mit*

$$|f(z)| \leq C(1 + |z|)^m \qquad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C},$$

so ist f *ein Polynom vom Grad* $\leq m$ *. (Die verlangte Abschätzung ist offenbar äquivalent zu* $|f(z)| \leq C'|z|^m$ *für große* $|z|$ *; d. h. sie bedeutet, daß* f *höchstens wie* $|z|^m$ *wächst.)*

Beweis. Die Cauchy'sche Koeffizientenabschätzung liefert für $\varrho \geq 1$

$$\begin{aligned} |a_n| &\leq \varrho^{-n} \max\Big\{|f(z)| : |z| = \varrho\Big\} \\ &\leq \varrho^{-n} C(1 + \varrho)^m \leq C 2^m \varrho^{m-n} \\ &\longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad \varrho \longrightarrow \infty \quad \text{und} \quad n > m . \end{aligned}$$

Also ist $a_n = 0$ für $n > m$, d. h. die Taylorreihe ist endlich, genauer: ein Polynom vom Grad $\leq m$. □

Korollar 14.10 (Erster Satz von Liouville) *Ist* f *eine beschränkte ganze Funktion, so ist* f *konstant.*

Der ***Beweis*** ergibt sich aus dem vorhergehenden Satz mit $m = 0$.

Zweiter Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra. Jedes Polynom p vom Grad ≥ 1 hat mindestens eine Nullstelle: Hätte p keine Nullstelle, so wäre $1/p$ eine ganze Funktion, die für $z \longrightarrow \infty$ gegen Null strebt. Nach dem Ersten Satz von Liouville ist sie dann identisch Null, ein Widerspruch. □

Sei f holomorph bei z_0, $m \in \mathbb{N}_0$. Wir sagen z_0 ist eine **m–*fache Nullstelle*** (Nullstelle mit Vielfachheit m), wenn gilt

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z)$$

mit einer bei z_0 holomorphen Funktion g mit $g(z_0) \neq 0$.

Satz 14.11 *Sei f holomorph bei z_0. Dann ist z_0 genau dann eine m–fache Nullstelle von f, wenn gilt*

$$f^{(n)}(z_0) = 0 \quad \textit{für} \quad n = 0, \ldots, m-1, \qquad f^{(m)}(z_0) \neq 0\,.$$

Beweis. $\Longrightarrow$: Sei z_0 eine m–fache Nullstelle, $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$. Die Ableitungen $f^{(m)}$ mit $n < m$ bestehen aus Termen, die alle mindestens einen Faktor $(z - z_0)$ enthalten; also gilt $f^{(n)}(z_0) = 0$ für $n < m$. Die Ableitung $f^{(m)}$ enthält neben solchen Termen auch $m!g(z)$; also gilt $f^{(m)}(z_0) = m!g(z_0) \neq 0$.

$\Longleftarrow$: Gilt $f^{(n)}(z_0) = 0$ für $n < m$ und $f^{(m)}(z_0) \neq 0$, so lautet die Taylorreihe um z_0

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)\,(z - z_0)^n \\ &= (z - z_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+m)!} f^{(n+m)}(z_0)\,(z - z_0)^n \\ &=: (z - z_0)^m g(z) \end{aligned}$$

mit

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+m!)} f^{(n+m)}(z_0)\,(z - z_0)^n, \qquad g(z_0) = \frac{1}{m!} f^{(m)}(z_0) \neq 0\,. \qquad \square$$

Beispiel 14.12 An der Entwicklung des Sinus um $z_0 = 0$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

erkennt man, daß $z_0 = 0$ eine einfache Nullstelle ist. Mit

$$\sin z = (-1)^n \sin(z - n\pi)$$

folgt hieraus, daß alle $n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$ einfache Nullstellen sind. Aus Aufgabe **??** wissen wir, daß sin keine weiteren Nullstellen in $\mathbb{C}$ hat. #

14.3 Übungsaufgaben

14.1 Die Potenzreihe von f um z_0 habe den Konvergenzradius r, $0 < r < \infty$.

a) Es gibt mindestens ein z_1 mit $|z_1 - z_0| = r$ so, daß f in keinen Kreis um z_1 holomorph fortsetzbar ist.

b) Man zeige an Beispielen, daß insbesondere folgende Situationen auftreten:

α) die Potenzreihe konvergiert in keinem Randpunkt und mit Ausnahme eines Punktes ist f über jeden Randpunkt hinaus fortsetzbar,

β) die Potenzreihe konvergiert in jedem Randpunkt.

14.2 a) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig, f holomorph in $\Omega \setminus g$, wobei g eine Gerade in $\mathbb{C}$ ist. Dann ist f holomorph in Ω (Satz von Morera, vgl. Aufgabe **??**).

b) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ und $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ein Stück des Randes von Ω, $f : \Omega \cup (a, b) \longrightarrow \mathbb{C}$ sei stetig, holomorph in Ω und $f(x) \in \mathbb{R}$ für $x \in (a, b)$. Dann ist

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{für} \quad z \in \Omega \cup (a, b), \\ \overline{f(\overline{z})} & \text{für} \quad z \in \Omega^* = \{z \in \mathbb{C} : \overline{z} \in \Omega\} \end{cases}$$

holomorph in $\Omega \cup (a, b) \cup \Omega^*$. Diese Fortsetzung ist eindeutig bestimmt (Schwarz'scher Spiegelungssatz).

15 Isolierte Singularitäten, Laurentreihen, Residuensatz

15.1 Die Laurententwicklung

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in \mathbb{C}$ (nicht notwendig in Ω). Der ***Kreisring***

$$K = \Big\{ z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R \Big\}, \qquad 0 \le r < R$$

liege ganz in Ω.

Ist Γ_η der Kreisweg (in positiver Richtung) mit Radius η um z_0, so gilt auf Grund der Cauchy'schen Integralformel (Satz **??**) für jedes $\delta \in (0, (R-r)/2)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int\limits_{\Gamma_{R-\delta}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta - \int\limits_{\Gamma_{r+\delta}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta \right\} \quad \text{für} \quad r + \delta < |z - z_0| < R - \delta .$$

Für $z \in K(z_0, R-\delta)$ und $\zeta \in \Gamma_{R-\delta}$ gilt (vgl. Beweis des Taylor'schen Satzes)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} . \end{aligned}$$

Wegen $\left| \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < \dfrac{R - 2\delta}{R - \delta} =: q(R, \delta) < 1$ für alle $\zeta \in \Gamma_{R-\delta}$ und $z \in K(z_0, R - 2\delta)$ ist die Konvergenz gleichmäßig bezüglich $z \in K(z_0, R - 2\delta)$ und $\zeta \in \Gamma_{R-\delta}$. Ebenso gilt für $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{K}(z_0, r + \delta)$ und $\zeta \in \Gamma_{r+\delta}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{-1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = \frac{-1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^n \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} ; \end{aligned}$$

wobei hier die Konvergenz gleichmäßig ist bezüglich $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{K}(z_0, r + 2\delta)$ und $\zeta \in \Gamma_{r+\delta}$. Damit folgt (da der Grenzübergang in der Reihe vertauschbar ist mit der Integration) für z

mit $r+\delta < |z-z_0| < R-\delta$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\left\{\int\limits_{\Gamma_{R-\delta}} f(\zeta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta - \int\limits_{\Gamma_{r+\delta}} f(\zeta)\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta\right\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} a_n &= \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\Gamma_{R-\delta}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta & \text{für} \quad n \geq 0, \\ \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\Gamma_{r+\delta}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta & \text{für} \quad n < 0 \end{cases} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\varrho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{Z},\ r < \varrho < R. \end{aligned}$$

Diese Reihe konvergiert gleichmäßig bezüglich $z \in \left\{z \in \mathbb{C} : r+2\delta < |z-z_0| < R-2\delta\right\}$; da $\delta > 0$ beliebig war, konvergiert sie gleichmäßig in jedem kleineren Kreisring als K. — Der „positive“ Teil der Reihe $(n \geq 0)$ ist formal gleich wie eine Taylorreihe. Ist f ins gesamte Innere von Γ_r holomorph fortsetzbar, so erhält man tatsächlich $a_n = 0$ für $n < 0$, d. h. man erhält dann die Taylorreihe um z_0. Zusammen mit Satz **??** haben wir damit bewiesen.

Satz 15.1 (Laurentreihe) *Ist* f *in* Ω *holomorph und*

$$K = \left\{z \in \mathbb{C} : r < |z-z_0| < R\right\} \subset \Omega,$$

so gilt die ***Laurententwicklung*** *von* f *um* z_0,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \qquad \textit{für alle} \quad z \in K,$$

mit

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\varrho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad r < \varrho < R.$$

Die Konvergenz ist gleichmäßig in jedem kleineren Kreisring

$$K_\varepsilon = \Big\{ z \in \mathbb{C} : \; r + \varepsilon < |z - z_0| < R - \varepsilon \Big\}, \quad \varepsilon > 0 \,.$$

Ist $|f(z)| \leq M$ *für alle* z *mit* $|z - z_0| = \varrho$ *so gilt die*

$$\textbf{\textit{Cauchy–Abschätzung}} \qquad |a_n| \leq \frac{M}{\varrho^n} \,.$$

Die Ableitungen von $f(\cdot)$ *können durch gliedweise Differentiation der Reihe berechnet werden.*

15.2 Isolierte Singularitäten

Ein Punkt z_0 heißt eine ***isolierte Singularität*** der Funktion f, wenn ein Kreisring der Form

$$K = \Big\{ z \in \mathbb{C} : \; 0 < |z - z_0| < \varepsilon \Big\}$$

(Kreis ohne Mittelpunkt, ***punktierter Kreis***) existiert, in dem f holomorph ist.

Sei z_0 eine isolierte Singularität von f,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{die Laurententwicklung von} \quad f \quad \text{um} \quad z_0 \,.$$

Dann ist der ***Hauptteil*** der Laurentreihe von f bei z_0 definiert durch

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} \,.$$

Man unterscheidet drei Typen von isolierten Singularitäten: Eine isolierte Singularität z_0 von f heißt

— ***hebbar***, falls der Hauptteil der Laurentreihe bei z_0 verschwindet (d. h. die Laurentreihe ist eine Potenzreihe; die Funktion ist nach z_0 holomorph fortsetzbar, es liegt eigentlich gar keine Singularität vor, z. B. $f(z) = z^{-1} \sin z$ mit $z_0 = 0 \,, p = 1$.

— ein ***Pol***, falls der Hauptteil der Laurentreihe bei z_0 endlich ist, $\sum_{n=1}^{p} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ mit $a_{-p} \neq 0$; die natürliche Zahl p heißt die ***Ordnung des Pols*** z_0; z. B. $f(z) = z^{-1}$ mit $z_0 = 0$, $p = 1$.

— eine ***wesentliche Singularität***, falls der Hauptteil der Laurentreihe bei z_0 unendlich ist, z. B. $f(z) = \exp(1/z) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!} z^{-n}$ mit $z_0 = 0$.

Natürlich kennt man nicht immer die Laurentreihe explizit; es scheint deshalb schwer zu sein, zu entscheiden, welcher Typ einer isolierten Singularität vorliegt. Tatsächlich ist es auch möglich, diesen am Verhalten der Funktion in der Umgebung der Singularität zu erkennen; dies wird im folgenden gezeigt.

Satz 15.2 (Riemann'scher Hebbarkeitssatz) *Eine isolierte Singularität z_0 von f ist genau dann hebbar, wenn f in einer punktierten Umgebung von z_0 beschränkt ist.*

Beweis. $\Longrightarrow$: Ist klar, da f nach z_0 holomorph fortsetzbar ist.

$\Longleftarrow$: Sei $|f(z)| \leq M$ für z aus einer Umgebung von z_0. Für hinreichend kleine $\varrho > 0$ liefert die Cauchy'sche Abschätzung (vgl. Satz **??**)

$$|a_n| \leq \frac{M}{\varrho^n} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Für $n < 0$ und $\varrho \longrightarrow 0$ folgt hieraus $a_n = 0$, d. h. der Hauptteil der Laurentreihe verschwindet. □

Satz 15.3 (Satz von Casorati–Weierstraß) *Eine isolierte Singularität z_0 von f ist genau dann eine wesentliche Singularität, wenn gilt:*

> *für jedes $w \in \mathbb{C}$ und jedes $\varepsilon > 0$ existiert in jedem punktierten Kreis $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \delta\}$ ein z mit $|f(z) - w| < \varepsilon$ (d. h. das Bild jedes punktierten Kreises um z_0 ist dicht in $\mathbb{C}$).*

Beweis. $\Longleftarrow$: Nehmen wir an, daß z_0 nicht wesentliche Singularität ist. Dann gilt

(i) z_0 ist hebbare Singularität, d. h. f ist beschränkt nahe z_0, oder

(ii) z_0 ist Pol, d. h. es gilt mit einem $p \in \mathbb{N}$ und $a_{-p} \neq 0$

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |z - z_0|^{-p} \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-p}(z - z_0)^n \right| \\ &\geq |z - z_0|^{-p} \Big\{ |a_{-p}| - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n-p}|\, |z - z_0|^n}_{\longrightarrow 0 \text{ für } z \to z_0} \Big\} \\ &\longrightarrow \infty \quad \text{für} \quad z \longrightarrow z_0 \,. \end{aligned}$$

Beides widerspricht der Dichtheit der Bilder punktierter Kreise um z_0.

$\Longrightarrow$: Wir nehmen an, daß die Behauptung nicht gilt, d. h.

$$\exists\, w \in \mathbb{C},\ \varepsilon > 0,\ \delta > 0$$

mit

$$|f(z) - w| > \varepsilon \quad \text{für alle} \quad z \in K(z_0, \delta) \backslash \{z_0\} \,.$$

Dann ist $g(z) := (f(z) - w)^{-1}$ holomorph und beschränkt auf $K(z_0, \delta)\backslash\{z_0\}$. Also ist nach Satz **??** $g(\cdot)$ holomorph nach z_0 fortsetzbar, d. h. es existiert eine in $K(z_0, \delta)$ holomorphe Funktion h mit

$$\left.\begin{aligned} h(z) &= g(z) = (f(z) - w)^{-1} \\ f(z) &= \frac{1}{h(z)} + w \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad z \in K(z_0, \delta) \backslash \{z_0\} \,.$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

(i) $h(z_0) \neq 0$: Dann ist $h(\cdot)^{-1} + w$ eine holomorphe Fortsetzung von f auf $K(z_0, \delta)$ d. h. z_0 ist eine hebbare Singularität von f.

(ii) $h(z_0) = 0$, $h(z) = (z - z_0)^n h_0(z)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $h_0(z_0) \neq 0$. Aus

$$\begin{aligned} f(z) &= (z - z_0)^{-n} \frac{1}{h_0(z)} + w \\ &\qquad (1/h_0(\cdot) \quad \text{holomorph bei} \quad z_0 \quad \text{mit} \quad 1/h_0(z_0) \neq 0) \\ &= (z - z_0)^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} b_m (z - z_0)^m + w \qquad (\text{mit} \quad b_0 \neq 0\,) \end{aligned}$$

folgt, daß z_0 ein Pol (der Ordnung n) von f ist.

In beiden Fällen erhalten wir somit einen Widerspruch zu der Voraussetzung, daß z_0 wesentliche Singularität ist. □

Damit können wir nun auch Pole durch das Verhalten der Funktion in der Nähe der Singularität charakterisieren.

Satz 15.4 *Eine Singularität z_0 von f ist genau dann ein Pol, wenn gilt*

$$|f(z)| \longrightarrow \infty \qquad \textit{für} \quad z \longrightarrow z_0 \,.$$

Beweis. $\Longrightarrow$: Dies wurde bereits im Beweis des obigen Satzes benutzt und deshalb dort bewiesen.

$\Longleftarrow$: Gilt $|f(z)| \longrightarrow \infty$ für $z \longrightarrow z_0$, so ist z_0 nach dem Riemann'schen Hebbarkeitssatz nicht hebbar und nach dem Satz von Casorati–Weierstraß nicht wesentlich; also ist z_0 ein Pol. □

Ohne Beweis geben wir dafür noch die folgende ganz wesentliche Verschärfung des Satzes von Casorati–Weierstraß an; für einen Beweis vergleiche man z. B. H. Behnke – F. Sommer: Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen, § V. 6.

Satz 15.5 (Satz von Picard) *Ist z_0 eine wesentliche Singularität von f, so gilt für jedes $\varepsilon > 0$:*

— $\Big\{f(z) : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\Big\} = \mathbb{C}$, *oder*

— $\exists a \in \mathbb{C} \quad \textit{mit} \ \Big\{f(z) : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\Big\} = \mathbb{C}\backslash\{a\}$,

d. h. das Bild jedes punktierten Kreises um z_0 ist entweder ganz $\mathbb{C}$, oder $\mathbb{C}$ ohne genau einen Punkt.

Beispiel 15.6 Die beiden im Satz von Picard beschriebenen Fälle treten tatsächlich auf:

(i) Für $f(z) = \exp(1/z)$ und $z_0 = 0$ tritt der zweite Fall ein mit $a = 0$.

(ii) Für $f(z) = \cosh(1/z) = \frac{1}{2}\Big\{\exp(1/z) + \exp(-1/z)\Big\}$ und $z_0 = 0$ tritt der erste Fall ein. Tatsächlich gibt es für jedes $c \in \mathbb{C}$ ein z mit $f(z) = c$; dieses erhält man, indem man zunächst die Gleichung für $\exp(1/z)$

$$c = \frac{1}{2}\Big\{\exp(1/z) + \frac{1}{\exp(1/z)}\Big\}$$

nach $\exp(1/z)$ auflöst,

$$\exp(1/z) = c \pm \sqrt{c^2 - 1} \neq 0\,,$$

woraus sich ergibt

$$z = \Big\{\ln(c \pm \sqrt{c^2 - 1})\Big\}^{-1}. \qquad \#$$

15.3 Residuenkalkül

Ist z_0 eine isolierte Singularität von f, so wird der Koeffizient a_{-1} der Laurentreihe von f um z_0,

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z \qquad (\varepsilon > 0 \quad \text{hinreichend klein})$$

als ***Residuum*** von f bei z_0 bezeichnet, kurz $\operatorname{Res}(f, z_0)$. — Zumindest an Polstellen läßt sich das Residuum berechnen, ohne daß man die Laurentreihe explizit bestimmt:

Satz 15.7 (Berechnung des Residuums) *Sei z_0 ein Pol der Ordnung $p \in \mathbb{N}$ von f. Dann gilt*

$$Res\,(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(p-1)!}\Big\{(z - z_0)^p f(z)\Big\}^{(p-1)}.$$

Beweis. Die Laurentreihe von f um z_0 lautet

$$f(z) = \sum_{n=-p}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{für} \quad 0 < |z - z_0| < \varepsilon\,.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(p-1)!}\Big\{(z-z_0)^p f(z)\Big\}^{(p-1)} &= \frac{1}{(p-1)!}\Big\{\sum_{n=0}^{\infty} a_{n-p}(z-z_0)^n\Big\}^{(p-1)} \\
&= \frac{1}{(p-1)!}\sum_{n=p-1}^{\infty} a_{n-p} n(n-1)\dots(n-p+2)\,(z-z_0)^{n-p+1} \\
&\qquad (\text{für} \quad z \longrightarrow z_0 \quad \text{bleibt nur der Term mit} \quad n = p-1\,) \\
&\longrightarrow \frac{1}{(p-1)!} a_{-1}(p-1)\,(p-2)\dots(1) \\
&= a_{-1} \qquad \text{für} \quad z \longrightarrow z_0\,.
\end{aligned}$$

□

Satz 15.8 (Residuensatz) *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, f in Ω holomorph bis auf isolierte Singularitäten $\{z_j : j \in I\}$ (die sich natürlich nicht in Ω häufen können), Γ eine doppelpunktfreie positiv orientierte geschlossene Kurve in $\Omega \backslash \{z_j : j \in I\}$, deren Inneres O ganz in Ω liegt. Dann gilt*

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{z_j \in O} \mathit{Res}\,(f, z_j)\,.$$

Der ***Beweis*** ergibt sich sofort aus der Tatsache, daß Γ bezüglich $\Omega \backslash \{z_j : j \in I\}$ homotop ist zur Summe kleiner (ebenfalls positiv orientierter) Kreise um die $z_j \in O$; das Integral über diese (hinreichend kleinen) Kreise um z_j liefert gerade $2\pi i\,\mathrm{Res}\,(f, z_j)$.

Bemerkung: In obigem Residuensatz kann auf „doppelpunktfrei“ und „positiv orientiert“ verzichtet werden, wenn man statt dessen beachtet, wie oft die Kurve Γ die Punkte z_j (in positiver oder negativer Richtung) umläuft:

Umlaufzahl $\quad n_\Gamma(z_j) \in \mathbb{Z}\,.$

Es gilt dann offenbar

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j \in I} n_\Gamma(z_j)\,\mathrm{Res}\,(f, z_j)\,;$$

die Summe ist stets endlich (!). In vielen Fällen kann der Residuenkalkül benutzt werden, um auf sehr einfache Weise reelle Integrale zu berechnen:

Satz 15.9 (Berechnung reeller Integrale) *a) Sei* f *holomorph in* $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > -\varepsilon\}$ *bis auf isolierte Singularitäten; auf* $\mathbb{R}$ *liege keine Singularität und in* $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ *liegen nur endlich viele Singularitäten. Gilt außerden*

$$\int_{\Gamma_r^+} f(z)\,\mathrm{d}z \longrightarrow 0 \qquad \text{für} \quad r \longrightarrow \infty\,,$$

wobei Γ_r^+ *der Halbkreisbogen von* $+r$ *nach* $-r$ *in der oberen Halbebene ist, so gilt*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_j > 0} \operatorname{Res}(f, z_j)$$

(wobei auch die Existenz dieses Integrals folgt).

b) Die entsprechende Aussage gilt mit entsprechend definiertem Γ_r^- *auch für die untere Halbebene, wobei die Formel dann lautet:*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = -2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_j < 0} \operatorname{Res}(f, z_j)\,.$$

c) Die Forderung bezüglich des Integrals über Γ_r^+ *bzw.* Γ_r^- *gilt insbesondere, falls* $|f(z)| \le C|z|^{-1-\delta}$ *für hinreichend große* z *gilt.*

Beweis. Es genügt, Teil a) explizit zu beweisen: Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\Big(\text{mit } \Gamma_r^{(+)} = (\text{Strecke von } -r \text{ nach } r) + \Gamma_r^+\Big)$$

$$= \lim_{r\to\infty} \Big\{ \int_{\Gamma_r^{(+)}} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\Gamma_r^+} f(z)\,\mathrm{d}z \Big\}$$

(für r hinreichend groß umläuft $\Gamma_r^{(+)}$ alle Singularitäten

mit positivem Imaginärteil)

$$= \lim_{r\to\infty} \Big\{ 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_j > 0} \operatorname{Res}(f, z_j) - \int_{\Gamma_r^+} f(z)\,\mathrm{d}z \Big\}$$

$$= 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_j > 0} \operatorname{Res}(f, z_j)\,.$$

Beim Beweis von Teil b) ist lediglich zu beachten, daß die entsprechende Kurve $\Gamma_+^{(-)}$ die Singularitäten mit negativem Imaginärteil in negativer Richtung umläuft; dies verursacht das Minuszeichen. □

Beispiel 15.10 Aus der reellen Analysis ist bekannt, daß

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty} \arctan x \Big|_{-r}^{r} = \pi$$

gilt. Dieses Integral können wir nun auch mit obigem Satz berechnen. Der Integrand hat nur die Singularitäten $\pm i$, die jeweils Pole der Ordnung 1 sind.

Für die Residuen gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^2}, i\right) &= \lim_{z\to i} \frac{z-i}{(z+i)(z-i)} = \lim_{z\to i} \frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}\,,\\ \operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^2}, -i\right) &= \frac{-1}{2i}\,.\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^2}, i\right) = \pi$$

bzw.

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^2}, -i\right) = \pi\,.$$ #

Beispiel 15.11 Ganz entsprechend können wir jetzt auch das Integral

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

berechnen. Für den Integranden gilt

$$\left|\frac{e^{iz}}{1+z^2}\right| = \frac{e^{-\operatorname{Im} z}}{|1+z^2|}\,,$$

d. h. er ist für z mit großem negativen Imaginärteil sehr groß; für das Integral über Γ_r^-, läßt sich also nicht ohne weiteres zeigen, daß es gegen 0 strebt (Teil b) des obigen Satzes ist also nicht anwendbar). In der oberen Halbebene gilt

$$\left|\frac{e^{iz}}{1+z^2}\right| \leq \frac{1}{|1+z^2|},$$

d. h. das Integral über Γ_r^+ geht gegen 0. Somit gilt nach Teil a) des Satzes

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= 2\pi i \mathrm{Res}\left(\frac{e^{iz}}{1+z^2}, i\right) = 2\pi i \lim_{z\to i}\frac{e^{iz}}{z+i} \\ &= 2\pi i \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{\pi}{e}.\end{aligned}$$

(Dieses Beispiel macht insbesondere deutlich, daß es nicht immer möglich ist, Teil a) **und** Teil b) des Residuensatzes anzuwenden.) #

15.4 Abzählen von Nullstellen und Polen

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. f heißt in Ω ***meromorph***, wenn es in Ω bis auf Pole, die sich in Ω nicht häufen, holomorph ist.

Eine in Ω meromorphe Funktion hat also in jeder kompakten Teilmenge K von Ω nur endlich viele Pole $z_1, \ldots, z_n$ mit Ordnungen $p_1, \ldots, p_n$ $(n = n(K))$. Also ist

$$g(z) := f(z)\prod_{j=1}^{n}(z-z_j)^{p_j}$$

holomorph auf ganz K fortsetzbar, bzw. f ist in K der Quotient einer holomorphen Funktion g und eines Polynoms $p(z) = \prod_{j=1}^{n}(z-z_j)^{p_j}$. — Mit Hilfe des Weierstraß'schen Produktsatzes (vgl. § 18) werden wir sogar zeigen können: eine Funktion ist genau dann meromorph in Ω, wenn sie in ganz Ω Quotient zweier holomorpher Funktionen ist.

Satz 15.12 (Nullstellen und Polstellen zählendes Integral) *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, f meromorph in Ω, Γ eine doppelpunktfreie positiv orientierte geschlossene Kurve in Ω, die keine Nullstelle und keinen Pol trifft, deren Inneres ganz in Ω liegt. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = N - P$$

mit

$$\begin{aligned} N &= \textit{Zahl der mit Vielfachheit gezählten Nullstellen im Innern von } \Gamma\,, \\ P &= \textit{Zahl der mit Ordnung gezählten Pole im Innern von } \Gamma\,. \end{aligned}$$

Beweis. Da die Kurve Γ in Ω ohne die Nullstellen und Pole homotop zur Summe kleiner Kreise um die Pole bzw. Nullstellen im Innern von Γ ist, genügt es, die Formel für hinreichend kleine Kreise dieser Art zu beweisen:

(i) Sei z_0 Nullstelle mit Vielfachheit n, Γ ein kleiner Kreis (positiv orientiert) um z_0. Es gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-z_0)^n f_0(z) \qquad \text{mit} \quad f_0(z_0) \neq 0\,, \\ f'(z) &= n(z-z_0)^{n-1} f_0(z) + (z-z_0)^n f_0'(z)\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left\{ \frac{n}{z-z_0} + \frac{f_0'(z)}{f_0(z)} \right\} \mathrm{d}z \\ &\quad \text{(der zweite Summand des Integranden ist wegen} \\ &\quad f_0(z_0) \neq 0 \text{ holomorph bei } z_0\text{)} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{n}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} n 2\pi i = n\,. \end{aligned}$$

(ii) Ist z_0 ein Pol der Ordnung p, so gilt

$$f(z) = (z-z_0)^{-p} f_0(z) \qquad \text{mit} \quad f_0(z_0) \neq 0$$

und exakt die gleiche Rechnung (mit $-p$ statt n) liefert

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = -p\,.$$

□

Satz 15.13 (Rouché) *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph, Γ eine doppelpunktfreie geschlossene Kurve in Ω, deren Inneres ganz in Ω liegt, $|g(z)| < |f(z)|$ auf Γ. Dann haben f und $f+g$ gleich viele Nullstellen (mit Vielfachheit gezählt) im Innern von Γ. (Wie der Beweis zeigt, kann die Forderung „$|g(z)| < |f(z)|$ auf Γ“ ersetzt werden durch „$f(z) + \lambda g(z) \neq 0$ für $\lambda \in [0,1]$ und $z \in \Gamma$“.)*

Beweis. Für $\lambda \in [0,1]$ sei N_λ die Zahl der Nullstellen (mit Vielfachheit) von $f+\lambda g$ im Innern von Γ. Dann ist nach obigem Satz (da keine Pole vorhanden sind)

$$N_\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)+\lambda g'(z)}{f(z)+\lambda g(z)}\,\mathrm{d}z\,.$$

Diese Formel zeigt, daß N_λ stetig (sogar stetig differenzierbar) von $\lambda \in [0,1]$ abhängt. Da N_λ andererseits nur ganzzahlige Werte annimmt, ist N_λ konstant, also insbesondere $N_1 = N_0$. □

Beispiel 15.14 Die Funktion $h(z) = ze^{\alpha-z}-1$ mit $\alpha > 1$ hat genau eine Nullstelle z_0 mit $|z_0| < 1$. Dies kann man wie folgt sehen: Zunächst hat die Funktion $f(z) = ze^{\alpha-z}$ offenbar die einzige Nullstelle 0 (Vielfachheit 1). Weiter gilt mit $g(z) := -1$ für $|z| = 1$ (da $\alpha > 1$ gilt)

$$\begin{aligned}|g(z)| &= 1 < e^{\alpha-1} \le e^{\alpha-\mathrm{Re}\,z} \qquad (\mathrm{Re}\,z \le 1)\\ &= |e^{\alpha-z}| = |ze^{\alpha-z}| = |f(z)|\,.\end{aligned}$$

Mit dem Satz von Rouché folgt die Behauptung. #

Dritter Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra. Der Satz von Rouché erlaubt es, in einem Schritt zu beweisen, daß jedes Polynom vom Grad n

$$p(z) = z^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j \qquad (\text{o.E.}\quad a_n = 1)$$

genau n Nullstellen (mit Vielfachheit) hat: Die Funktion $f(z) := z^n$ hat die n–fache Nullstelle 0 (und sonst keine Nullstellen). Mit $g(z) := \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j$ gilt

$$|f(z)| = |z|^n > \left|\sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j\right| = |g(z)| \qquad \text{für}\quad |z| \quad \text{hinreichend groß.}$$

Also haben in jedem hinreichend großen Kreis um 0 die Funktion f und $p = f+g$ gleich viele Nullstellen, womit der Fundamentalsatz bewiesen ist. □

15.5 Übungsaufgaben

15.1 Für jedes $z_0 \in \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0,\ z \neq 0\}$ entwickle man die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1}$$

a) in ihre Taylorreihe um z_0 für $|z-z_0| < |z_0-i|$,

b) in ihre Laurentreihe um z_0 für

$\alpha)$ $|z_0-i| < |z-z_0| < |z_0+i|$,

$\beta)$ $|z_0+i| < |z-z_0|$.

15.2 a) Man zeige, daß

$$f(z) = \frac{\cos z}{(\sin z)^2}$$

bei 0 einen Pol der Ordnung 2 hat und berechne das Residuum.

b) z_0 ist genau dann m–fache Nullstelle einer bei z_0 holomorphen Funktion, wenn z_0 ein Pol der Ordnung m von $1/f$ ist.

15.3 Man sagt, f hat bei ∞ eine hebbare Singularität/einen Pol/eine wesentliche Singularität, wenn $g(z) = f(1/z)$ bei 0 eine hebbare Singularität/einen Pol/eine wesentliche Singularität hat.

a) Ist f eine nicht–konstante ganze Funktion und gibt es ein $c \in \mathbb{C}$ mit $f(z) \neq c$ für alle $z \in \mathbb{C}$, so hat f bei ∞ eine wesentliche Singularität.

b) Eine Funktion, die in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ nur Pole als Singularitäten hat, ist eine rationale Funktion.

c) Sei z_0 eine isolierte Singularität von f. Gibt es ein $C > 0$ und ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$|f(z)| \leq C|z-z_0|^{-m} \qquad \text{für} \quad z \quad \text{nahe} \quad z_0,$$

so ist z_0 ein Pol von f oder eine hebbare Singularität.

15.4 Sei f holomorph in $K(z_0, r)\backslash\{z_0\}$. Man entscheide, ob das im folgenden beschriebene Verhalten bei z_0 möglich ist und bestimme gegebenfalls den Typ der Singularität bei z_0.

a) Zu jedem $m \in \mathbb{N}$ existiert ein c_m mit $|f(z)| \geq c_m|z-z_0|^{-m}$.

b) Es gibt zwei gegen z_0 konvergente Folgen (z_n) und (w_n) so, daß $(f(z_n))$ und $(f(w_n))$ gegen verschiedene Grenzwerte konvergieren.

c) Es gibt eine gegen z_0 konvergente Folge (z_n) mit $|f(z_n)| \longrightarrow \infty$ und es gilt $|f(z)| > \varepsilon > 0$ für alle $z \in K(z_0, r)\backslash\{z_0\}$.

15.5 Ist f in $\mathbb{C}\backslash K(0,r)$ holomorph, so sagt man, f hat bei ∞ eine Nullstelle (einen Pol) der Vielfachheit n (der Ordnung p) wenn dies für $f(1/z)$ bei 0 gilt. Sei N die Summe der Vielfachheiten der Nullstellen, P die Summe der Ordnungen der Pole einer rationalen Funktion in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Dann gilt $N = P$.

15.6 Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. f heißt doppelt–periodisch, wenn $\alpha, \beta \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit $\alpha/\beta \notin \mathbb{R}$ existieren so, daß gilt

$$\left.\begin{array}{l} z+\alpha \in \Omega,\ z+\beta \in \Omega \\[2ex] f(z+\alpha) = f(z+\beta) = f(z) \end{array}\right\} \quad \text{für alle} \quad z \in \Omega\,.$$

a) Eine ganze doppelt–periodische Funktion ist konstant.

b) Eine doppelt–periodische in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion heißt ***elliptische Funktion***. Durch

$$f(z) = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} (z - j - ki)^{-3}$$

ist eine elliptische Funktion definiert.

c) Die Summe der Residuen der in einem Periodenparallelogramm einer elliptischen Funktion gelegenen Pole ist 0 (***zweiter Satz von Liouville***).

d) Eine elliptische Funktion hat in jedem Periodenparallelogramm gleich viele Nullstellen wie Pole, mit Vielfachheit bzw. Ordnung gezählt (***dritter Satz von Liouville***).

15.7 Man berechne das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \qquad \left(\text{Ergebnis: } \frac{\pi}{2}\right).$$

Anleitung: $\int\limits_0^\infty \dfrac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4i}\int\limits_\Gamma \dfrac{1}{z}\,(e^{iz} - e^{-iz})\,\mathrm{d}z$, wobei Γ von $-\infty$ bis (z. B.) -1 auf $\mathbb{R}$ läuft, von -1 nach $+1$ auf dem Halbkreis mit Radius 1 um 0 in der unteren Halbebene, und von 1 nach ∞ auf $\mathbb{R}$.

15.8 a) Man zeige $\int\limits_0^{2\pi} f(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x = -i \int\limits_{|z|=1} f\Big(\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}),\ \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})\Big)\,\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z\,.$

b) Man berechne $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{5+4\cos x}\,\mathrm{d}x$ (Ergebnis: $\frac{2\pi}{3}$).

15.9 Sei $x_0 \in (a,b) \subset \mathbb{R}$, A eine offene Menge in $\mathbb{C}$ mit $[a,b] \subset \Omega$ und $f : \Omega\backslash\{x_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit einem Pol der Ordnung 1 bei x_0. Dann gilt

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_a^b f(x+i\varepsilon)\,\mathrm{d}x = i\pi\,\mathrm{Res}\,(f,x_0) + \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_a^{x_0-\varepsilon} + \int\limits_{x_0+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

16 Der Riemann'sche Abbildungssatz

Es ist Ziel dieses Abschnitts, den folgenden Satz, der sicher einen der Höhepunkte der Funktionentheorie darstellt, zu beweisen.

Satz 16.1 (Riemann'scher Abbildungssatz) *Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend, $\Omega \neq \mathbb{C}$, so gibt es eine holomorphe Funktion $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, die Ω bijektiv auf $E := K(0,1)$ abbildet und deren Inverse ebenfalls holomorph ist (kurz: Ω wird* ***biholomorph*** *auf E abgebildet). — Man kann zusätzlich in einem beliebigen Punkt $z_0 \in \Omega$ vorschreiben: $f(z_0) = 0,\ f'(z_0) > 0$; dadurch ist dann f eindeutig bestimmt.*

Beispiel 16.2 Für $\Omega = \mathbb{C} \backslash (-\infty, 0]$ läßt sich eine solche Abbildung leicht angeben:

— $z \mapsto \sqrt{z}$ (mit $|\arg \sqrt{z}\,| < \pi/2$) bildet zunächst Ω biholomorph auf die offene rechte Halbebene ab.

— $z \mapsto \left(z + \frac{1}{2}\right)^{-1} - 1$ bildet die rechte Halbebene biholomorph auf E ab.

Also hat

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z} + 1/2} - 1$$

die gewünschte Eigenschaft. – Um für ein $z_0 \in \Omega$ zu erreichen, daß $f(z_0) = 0$ gilt, ist nach dem ersten Schritt eine Abbildung $z \mapsto az + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ einzufügen, die die rechte Halbebene auf sich abbildet und $\sqrt{z_0}$ in $1/2$ überführt. Um schließlich $f'(z_0) > 0$ zu erreichen, ist gegebenenfalls am Schluß eine zusätzliche Drehung erforderlich (Multiplikation mit $\alpha \in \mathbb{C},\ |\alpha| = 1$). #

Bemerkung 16.3 a) Der Satz gilt sicher nicht für $\Omega = \mathbb{C}$. Wäre nämlich f eine holomorphe Abbildung von $\mathbb{C}$ in E, so wäre f ganz und beschränkt, also wäre f nach dem Ersten Satz von Liouville (Korollar **??**) konstant und somit nicht injektiv.

b) Zwei beliebige Gebiete Ω_1 und Ω_2 mit den im Satz verlangten Eigenschaften können biholomorph aufeinander abgebildet werden.

c) Wie erstaunlich dieses Ergebnis ist, zeigt die folgende Überlegung: Man kann sich eventuell noch vorstellen, daß glatt berandete Gebiete in $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{C}$ stetig (reell) differenzierbar und mit stetig (reell) differenzierbaren Inversen auf E abgebildet werden können, aber

(i) es stehen mit den holomorphen Funktionen viel weniger Funktionen als die stetig differenzierbaren zur Verfügung,

(ii) die zugelassenen Gebiete sind viel allgemeiner („wilde" Ränder), z. B.

In beiden Fällen ist Ω das Komplement der Kurve

Vor dem eigentlichen Beweis des Riemann'schen Abbildungssatzes sind allerdings noch einige Hilfsmittel bereitzustellen, die durchaus auch von eigenständigem Interesse sind.

16.1 Einige Hilfsmittel

Der folgende Satz zeigt, daß auf einer offenen einfach zusammenhängenden Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ mit $0 \notin \Omega$ ein auf Ω holomorpher Logarithmus und eine ebenfalls auf Ω holomorphe n–te Wurzel definiert werden können.

Satz 16.4 *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend, $0 \notin \Omega$.*

a) *Ist $z_0 \in \Omega$ und $w_0 \in \mathbb{C}$ mit $\exp(w_0) = z_0$, so gibt es genau eine holomorphe Funktion*

$$\mathrm{Ln} : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$$

mit

$$\mathrm{Ln}\,(z_0) = w_0 \quad \textit{und} \quad \exp\,(\mathrm{Ln}\,(z)) = z \quad \textit{für alle} \quad z \in \Omega\,.$$

b) *Es gibt genau eine holomorphe Funktion*

$$q_n \,:\, \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$$

mit

$$q_n(z_0) \,=\, \exp\left(\frac{w_0}{n}\right), \quad q_n(z)^n \,=\, z \quad \textit{für alle} \quad z \in \Omega\,.$$

Beweis. a) Auf Grund der Forderung $\exp(\mathrm{Ln}(z)) = z$ ist Ln jedenfalls lokal eine Umkehrfunktion von exp, und somit $\mathrm{Ln}'(z) = \dfrac{1}{z}$. Zusammen mit $\mathrm{Ln}\,(z_0) = w_0$ ergibt sich daraus zwangsläufig (und damit die Eindeutigkeit von Ln!)

$$\mathrm{Ln}\,(z) \,=\, w_0 + \int\limits_{z_0}^{z} \frac{1}{\zeta}\,\mathrm{d}\zeta\,,$$

wobei das Integral wegunabhängig ist, da Ω einfach zusammenhängend ist mit $0 \notin \Omega$. Insbesondere ist Ln holomorph und es gilt $\mathrm{Ln}(z_0) = w_0$. Es bleibt zu zeigen, daß tatsächlich $F = \exp \circ \mathrm{Ln}$ auf Ω die Identität ist. Es gilt

$$\begin{aligned}
F(z_0) &= \exp(\mathrm{Ln}\,(z_0)) \,=\, \exp(w_0) \,=\, z_0\,,\\
F'(z_0) &= \frac{d}{\mathrm{d}z}\exp(\mathrm{Ln}\,(z))\Big|_{z=z_0}\\
&= \exp(\mathrm{Ln}\,(z))\frac{d}{\mathrm{d}z}\Big\{w_0 + \int\limits_{z_0}^{z}\frac{1}{\zeta}\,\mathrm{d}\zeta\Big\}\Big|_{z=z_0}\\
&= \exp(\mathrm{Ln}\,(z))\frac{1}{z}\Big|_{z=z_0} \,=\, \exp(w_0)\frac{1}{z_0} \,=\, 1\,,\\
F''(z) &= \frac{d}{\mathrm{d}z}\Big\{\exp(\mathrm{Ln}\,(z))\frac{1}{z}\Big\}\\
&= \exp(\mathrm{Ln}\,(z))\frac{1}{z}\frac{1}{z} + \exp(\mathrm{Ln}\,(z))\frac{-1}{z^2}\\
&= 0 \qquad \text{für alle} \quad z \in \Omega\,,\\
F^{(n)}(z) &= 0 \qquad \text{für alle} \quad z \in \Omega,\ n \geq 2\,.
\end{aligned}$$

Im Punkt z_0 stimmt also F sammt allen Ableitungen mit id überein. Nach dem Identitätssatz ist also $F = \mathrm{id}$.

b) Auf Grund der Forderung $(q_n(z))^n = z$ ist q_n zumindest lokal eine Umkehrfunktion von $z \mapsto z^n$, also

$$q_n'(z) = \frac{1}{nq_n(z)^{n-1}} = \frac{1}{n}\frac{q_n(z)}{q_n(z)^n} = \frac{1}{n}\frac{q_n(z)}{z},$$

d. h. q_n ist durch Vorgabe des Wertes in einem Punkt z_0, $q_n(z_0) = \exp(w_0/n)$, eindeutig bestimmt; denn es sind dann alle Ableitungen im Punkt z_0 festgelegt. Eine solche Funktion ist aber offensichtlich gegeben durch

$$q_n(z) = \exp\left(\frac{1}{n}\mathrm{Ln}\,(z)\right). \qquad \square$$

Satz 16.5 (Satz von der Gebietstreue) *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend (in der Funktionentheorie üblicherweise als* ***Gebiet*** *bezeichnet), $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant. Dann ist $f(\Omega) = \{f(z) : z \in \Omega\}$ ebenfalls offen und zusammenhängend (also wieder ein Gebiet).*

Beweis. **$\mathbf{f(\Omega)}$ ist zusammenhängend:** Seien $w_1, w_2 \in f(\Omega)$. Dann existieren $z_1, z_2 \in \Omega$ mit $f(z_1) = w_1$, $f(z_2) = w_2$ und, da Ω zusammenhängend ist, eine Kurve Γ in Ω mit Anfangspunkt z_1 und Endpunkt z_2. Somit ist $\hat{\Gamma} = f(\Gamma)$ eine Kurve in $f(\Omega)$ mit Anfangspunkt w_1 und Endpunkt w_2.

$\mathbf{f(\Omega)}$ ist offen: Sei $w_0 = f(z_0) \in f(\Omega)$; es ist zu zeigen, daß ein $\delta_0 < 0$ existiert mit $K(w_0, \delta_0) \subset f(\Omega)$. — Da f nicht konstant ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$f'(z_0) = f''(z_0) = \ldots = f^{(n-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(n)}(z_0) \neq 0,$$

$$f(z) = w_0 + (z - z_0)^n g(z),$$

wobei g eine in Ω holomorphe Funktion ist mit $g(z_0) = n! f^{(n)}(z_0) \neq 0$. Nach Satz **??** gibt es also eine in der Nähe von z_0 holomorphe Funktion $h_0(\cdot)$ mit $h_0(z_0) \neq 0$ und

$$h_0(z)^n = g(z) \qquad \text{für alle } z \text{ nahe } z_0 \qquad \left(\text{„}\, h(z) = \sqrt[n]{g(z)}\,\text{“}\right).$$

Mit $h(z) := (z - z_0)h_0(z)$ gilt also

$$f(z) = w_0 + h(z)^n,$$

wobei h bei z_0 holomorph ist mit

$$h(z_0) = 0, \quad h'(z_0) = h_0(z_0) \neq 0 .$$

Wir betrachten nun für einen Augenblick h als Abbildung in $\mathbb{R}^2$: $h(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Es ist offenbar, auf Grund der Cauchy–Riemann'schen Differentialgleichungen,

$$\begin{aligned} \operatorname{Det}\begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} &= \operatorname{Det}\begin{pmatrix} u_x & -u_y \\ u_y & u_x \end{pmatrix} = u_x^2 + u_y^2 \\ &\neq 0 \qquad \text{für} \quad x + iy = z_0, \quad \text{da } h'(z_0) \neq 0 . \end{aligned}$$

Also ist der Satz über die Umkehrfunktion aus der Analysis II anwendbar; insbesondere gilt: Es existieren ε mit $K(z_0, \varepsilon) \subset \Omega$ und $\delta > 0$ mit

$$h(K(z_0, \varepsilon)) \supset K(h(z_0), \delta) = K(0, \delta) .$$

Damit folgt nun:

$$\begin{aligned} f(\Omega) \supset f(K(z_0,\varepsilon)) &= \Big\{ f(z_0) + h(z)^n : z \in K(z_0,\varepsilon) \Big\} \\ &= \{w_0\} + \Big\{ h(z) : z \in K(z_0,\varepsilon) \Big\}^n \supset \{w_0\} + K(0,\delta)^n \\ &= \{w_0\} + K(0,\delta^n) = K(w_0, \delta^n) . \end{aligned}$$

Das ist die gewünschte Aussage mit $\delta_0 := \delta^n$. □

Satz 16.6 *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend, (f_n) eine auf Ω kompakt gegen f konvergente Folge holomorpher Funktionen; jedes f_n habe höchstens m a–Stellen (mit Vielfachheit gezählt). Dann ist f entweder konstant oder hat ebenfalls höchstens m a–Stellen. (Man beachte, daß auch dieses Resultat für stetig reell differenzierbare Funktionen natürlich nicht gilt.)*

Beweis. Nehmen wir an, daß f nicht konstant ist, aber mindestens $m+1$ a–Stellen hat. Dann gibt es eine positiv orientierte geschlossene Kurve Γ in Ω, die keine Nullstellen von

f trifft, deren Inneres ganz in Ω liegt, und in deren Innerem mindestens $m+1$ a–Stellen (mit Vielfachheit) liegen. Nach dem Satz von Rouché (Satz **??**) gilt dann

$$\begin{aligned} m+1 &\leq \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{(f(z)-a)'}{f(z)-a}\,\mathrm{d}z \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{(f_n(z)-a)'}{f_n(z)-a}\,\mathrm{d}z \;\leq\; m\,. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch. □

Satz 16.7 *Für jedes* $w \in E$ *ist*

$$g_w(z) \;=\; \frac{z-w}{1-\overline{w}z}$$

eine biholomorphe Abbildung von E *auf sich mit* $g(w) = 0$ *und* $g(0) = -w$. *Die Umkehrabbildung ist*

$$g_w^{-1}(z) \;=\; g_{-w}(z) \;=\; \frac{z+w}{1+\overline{w}z}\,.$$

Beweis. Im Sinne der früher betrachteten Möbiustransformationen ist

$$g_w \;=\; \varphi_A \qquad \text{mit} \quad A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -w \\ -\overline{w} & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Singularität von g_w liegt bei $1/\overline{w}$ und somit in $\mathbb{C}\backslash\overline{E}$, da $|w| < 1$ ist. Also ist g_w in E holomorph. Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ gilt

$$|g_w(z)| \;=\; \frac{|1-w\overline{z}|}{|1-\overline{w}z|} \;=\; 1\,;$$

da Möbiustransformationen „Kreise“ auf „Kreise“ abbilden, wird also die Einheitskreislinie auf sich abgebildet. Wegen $g_w(0) = -w$ wird das Innere auf sich abgebildet.

Die Abbildung g_{-w} wird erzeugt durch die Matrix

$$B \;=\; \begin{pmatrix} 1 & w \\ \overline{w} & 1 \end{pmatrix}.$$

d. h. $g_{-w} \circ g_w$ bzw. $g_w \circ g_{-w}$ werden erzeugt durch BA bzw. AB mit

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & w \\ \overline{w} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -w \\ -\overline{w} & 1 \end{pmatrix} = (1 - |w|^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = BA\,.$$

Also ist $g_{-w} \circ g_w = g_w \circ g_{-w} = \mathrm{id}\,.$ □

Satz 16.8 (Schwarz'sches Lemma) *Sei* $f : E \longrightarrow E$ *holomorph mit* $f(0) = 0$ *. Dann gilt:*

a) $|f(z)| \le |z|$ *für alle* $z \in E$ *,* $|f'(0)| \le 1$.

b) *Gilt*

α) $|f(z_0)| = |z_0|$ *für ein* $z_0 \in E\backslash\{0\}$ ***oder***

β) $|f'(0)| = 1$,

so gilt $f(z) = \alpha z$ *für alle* $z \in E$ *mit einem* $\alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| = 1$.

Beweis. Da 0 eine Nullstelle von f ist, gilt

$$f(z) = (z - 0)g(z) = zg(z)$$

mit einer holomorphen Funktion $g : E \longrightarrow \mathbb{C}$.

a) Für $z \neq 0$ gilt $g(z) = f(z)/z$. Für jedes $z \in E$ und jedes $\varrho < 1$ mit $\varrho \ge |z|$ folgt aus dem Maximumprinzip:

$$\begin{aligned} |g(z)| &\le \max\Big\{|g(w)| : |w| = \varrho\Big\} \\ &= \frac{1}{\varrho} \max\Big\{|f(w)| : |w| = \varrho\Big\} \le \frac{1}{\varrho}\,. \end{aligned}$$

Da dies für alle $\varrho \in [|z|, 1)$ gilt, folgt

$$\begin{aligned} |g(z)| &\le 1 \qquad \text{für alle} \quad z \in E\,, \\ |f(z)| &= |zg(z)| \le |z| \qquad \text{für alle} \quad z \in E\,. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$|f'(0)| = \lim_{t \to 0} \left| \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} \right| = \lim_{z \to 0} \left| \frac{f(z)}{z} \right| \le 1\,.$$

b) Ist g wie in Teil a) erklärt, so gilt offenbar

$$g(z) = \begin{cases} f(z)/z & \text{für} \quad z \neq 0\,, \\ f'(0) & \text{für} \quad z = 0\,. \end{cases}$$

Das bedeutet, daß $|g|$ sein Maximum im Innern von E annimmt (in z_0 im Fall α, in 0 im Fall β). Also ist $g(z) \equiv \alpha$ mit einem $|\alpha| = 1$, $f(z) = zg(z) = \alpha z$. □

Korollar 16.9 *Ist $f : E \longrightarrow E$ bijektiv und biholomorph mit $f(0) = 0$, so existiert ein $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha| = 1$ und $f(z) = \alpha z$.*

Beweis. Wegen $f(0) = 0$ und $f^{-1}(0) = 0$ folgt aus Teil a) des Schwarz'schen Lemmas

$$|f(z)| \leq |z| \quad \text{und} \quad |f^{-1}(w)| \leq |w| \qquad \text{für alle} \quad z, w \in E\,.$$

Damit folgt

$$|z| = |f^{-1}(f(z))| \leq |f(z)| \leq |z|, \quad |f(z)| = |z| \quad \text{für alle} \quad z \in E\,,$$

und somit aus Teil b) des Schwarz'schen Lemmas $f(z) = \alpha z$ mit $|\alpha| = 1$. □

16.2 Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes

Eindeutigkeit: Sind f und g zwei biholomorphe Abbildungen mit

$$f(z_0) = g(z_0) = 0, \quad f'(z_0) > 0, \quad g'(z_0) > 0\,,$$

so ist

$$h := g \circ f^{-1} : E \longrightarrow E$$

biholomorph mit

$$h(0) = 0 \quad \text{und} \quad h'(0) = g'(z_0)\,\frac{1}{f'(z_0)} > 0\,.$$

Aus Korollar **??** folgt damit $h = \mathrm{id}$ und somit $g = f$.

Existenz:

1. Schritt: Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß $0 \notin \Omega$ gilt. Hierfür ist lediglich eine (offenbar biholomorphe) Translation nötig.

2. Schritt: Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß Ω im Äußeren eines Kreises $K(w_0, \delta)$ liegt: Nach Satz **??** existiert eine holomorphe Funktion (eine Quadratwurzel)

$$q = q_2 : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \text{mit} \quad q(z)^2 = z \quad \text{für alle} \quad z \in \Omega\,;$$

q ist offenbar biholomorph, da die Inverse das Quadrat ist.

Das Bild $q(\Omega)$ ist offen und einfach zusammenhängend und hat die Eigenschaft: Für jedes $w \in q(\Omega)$ gilt $-w \notin q(\Omega)$. Wäre nämlich w und $-w$ in $q(\Omega)$, so gäbe es $z_1,\, z_2 \in \Omega$ mit

$$q(z_1) = w, \quad q(z_2) = -w\,,$$

$$z_1 = q(z_1)^2 = w^2 = (-w)^2 = q(z_2)^2 = z_2\,,$$

und somit

$$w = q(z_1) = q(z_2) = -w\,.$$

Das ist nur möglich, wenn $w = 0$ ist, was wir auf Grund des ersten Schrittes ausgeschlossen haben.

Wählen wir nun ein $\tilde{w}_0 \in q(\Omega)$, so existiert ein $\delta > 0$ mit $K(\tilde{w}_0, \delta) \subset q(\Omega)$, und somit auf Grund der obigen Überlegung $K(-\tilde{w}_0, \delta) \cap q(\Omega) = \phi$. Das ist die Behauptung für $w_0 := -\tilde{w}_0$ und das biholomorphe Bild $q(\Omega)$ von Ω.

3. Schritt: Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß $\Omega \subset E$ gilt. Mit dem im 2. Schritt gefundenen w_0 betrachten wir die auf Ω offensichtlich biholomorphe Abbildung

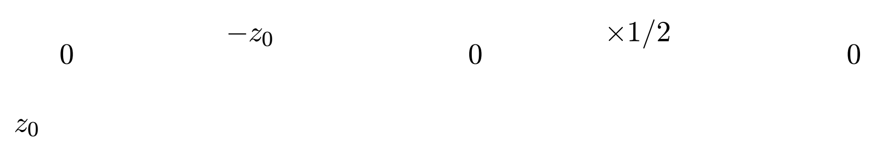
$$z \longrightarrow \frac{\delta}{z - w_0}\,;$$

sie bildet Ω in E ab.

4. Schritt: Wir können o. E. annehmen, daß $0 \in \Omega \subset E$ gilt: Sei z_0 ein Punkt aus Ω (falls die Bedingung $f(z_0) = 0$ im Satz vorgegeben ist, ist hier dieses z_0 zu wählen; $f'(z_0) \neq 0$ folgt dann aus der Biholomorphie; durch eine zusätzliche Drehung am Schluß des Beweises erhält man dann $f'(z_0) > 0$). Durch Translation

$$z \mapsto z - z_0$$

geht z_0 in 0 über, aber Ω liegt u. U. nicht mehr ganz in E. Dies ist aber durch eine zusätzliche Multiplikation mit $\dfrac{1}{2}$ zu erreichen. Diese Abbildungen sind offensichtlich biholomorph.



5. Schritt: (Wir gehen jetzt also von $0 \in \Omega \subset E$ aus). Unter den biholomorphen Abbildungen

$$f : \Omega \longrightarrow E \qquad \text{mit} \quad f(0) = 0\,, \; f'(0) > 0$$

gibt es eine mit größtem $f'(0)$:

Die Menge dieser Funktionen ist jedenfalls nicht leer, sie enthält id. Weiter gilt für jede dieser Funktionen und $\varrho > 0$ mit $K(0, \varrho) \subset \Omega$

$$\begin{aligned} f'(0) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=\varrho} \frac{f(z)}{z^2}\, \mathrm{d}z\,, \\ |f'(0)| &= \frac{1}{2\pi}\, 2\pi\varrho\, \varrho^{-2} = \varrho^{-1}\,. \end{aligned}$$

Also existiert ein $s_0 \geq 1$ mit

$$s_0 := \sup\Big\{ f'(0) : \; f : \Omega \longrightarrow E \quad \text{biholomorph}, \quad f(0) = 0,\, f'(0) > 0 \Big\}\,,$$

und es gibt eine Folge (f_n) biholomorpher Funktionen $\Omega \longrightarrow E$ mit

$$s_0 := \lim_{n\to\infty} f_n'(0) .$$

Nach dem Satz von Montel (Satz **??**) gibt es eine Teilfolge hiervon (die wir wieder mit (f_n) bezeichnen), die kompakt gegen eine holomorphe Funktion $f : \Omega \longrightarrow \overline{E}$ konvergiert. Da auch (f_n') kompakt gegen f' konvergiert, ist $f'(0) = s_0 \neq 0$ und somit f nicht konstant. Nach Satz **??** ist f injektiv, da alle f_n injektiv sind. Wegen $f_n'(z) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \Omega$ (f_n biholomorph) ist wiederum nach Satz **??** auch $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in \Omega$ (man beachte, daß auch (f_n') kompakt konvergiert und f_n' nicht identisch 0 ist). Also ist f biholomorph. Nach dem Satz von der Gebietstreue (Satz **??**) ist $f(\Omega)$ offen, d. h. aus $f(\Omega) \subset \overline{E}$ folgt sogar $f(\Omega) \subset E$. f ist also die (eine) gesuchte Funktion.

6. Schritt: Die im 5. Schritt gefundene Funktion bildet Ω holomorph **auf** E ab (damit ist der Satz bewiesen): Es ist nur noch die Surjektivität zu beweisen.

Wir nehmen an, daß ein $w_0 \in E \backslash f(\Omega)$ existiert. (Mit Hilfe dieses w_0 konstruieren wir eine biholomorphe Funktion $\tilde{f} : \Omega \longrightarrow E$ mit $\tilde{f}'(0) > f'(0)$. Das ist dann ein Widerspruch zur Konstruktion von f).

Die Abbildung

$$g_0(z) := \frac{z - w_0}{1 - \overline{w_0} z} \qquad (w_0 \text{ von oben})$$

bildet E biholomorph auf sich ab, $g_0(w_0) = 0$, $g_0(0) = -w_0$. Wegen $0 \notin \Omega_0 := g_0(f(\Omega))$, und da Ω_0 einfach zusammenhängend ist, existiert eine biholomorphe Funktion (Quadratwurzel)

$$q : \Omega_0 \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad q(z)^2 = z \quad \text{für alle} \quad z \in \Omega_0 .$$

Mit

$$w_1 := q\Big(g_0(f(0))\Big) = q(g_0(0)) = q(-w_0)$$

sei

$$g_1(z) := \frac{z - w_1}{1 - \overline{w_1} z} ,$$

$$F := g_1 \circ q \circ g_0 \circ f : \Omega \longrightarrow E .$$

Offenbar ist F biholomorph mit

$$\begin{aligned} F(0) &= g_1 \circ q \circ g_0 \circ f(0) = g_1 \circ q \circ g_0(0) = g_1 \circ q(-w_0) \\ &= g_1(w_1) = 0 . \end{aligned}$$

Bezeichnen wir mit Q die Funktion $z \mapsto z^2$, so gilt mit

$$h := g_0^{-1} \circ Q \circ g_1^{-1} : E \longrightarrow E ,$$

$$h(0) = g_0^{-1} \circ Q \circ g_1^{-1}(0) = g_0^{-1} \circ Q(w_1) = g_0^{-1}(w_1^2) = g_0^{-1}(-w_0) = 0$$

offensichtlich

$$h \circ F = g_0^{-1} \circ Q \circ g_1^{-1} \circ g_1 \circ q \circ g_0 \circ f = f ,$$

$$f'(0) = h'(F(0))F'(0) = h'(0)F'(0) .$$

Aus Teil a) des Schwarz'schen Lemmas folgt, da $h : E \longrightarrow E$ nicht bijektiv ist,

$$|h'(0)| < 1 .$$

Also ist

$$|F'(0)| = \frac{1}{|h'(0)|} f'(0) > f'(0)$$

und somit hat tatsächlich

$$\tilde{f}(z) = \frac{|F'(0)|}{f'(0)} f(z)$$

die gewünschte Eigenschaft. $\square$

17 Analytische Fortsetzung

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend. Aus dem Identitätssatz (Satz **??**) wissen wir, daß eine holomorphe Funktion $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ durch ihr Verhalten in einer beliebig kleinen Umgebung eines Punktes $z_0 \in \Omega$ (z. B. durch ihre Potenzreihe um z_0, ihren Funktionskeim) vollständig bestimmt ist.

Ist $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph, so kann f um jeden Punkt $z_0 \in \Omega$ in eine Potenzreihe (Taylorreihe) entwickelt werden. Der Konvergenzradius ϱ ist mindestens gleich dem Radius r des größten Kreises $K(z_0, r)$ um z_0, der noch ganz in Ω liegt. In $K(z_0, r)$ stimmt f mit der Reihe überein. Ist $K(z_0, \varrho) \cap \Omega$ zusammenhängend, so stimmt f sogar in $K(z_0, \varrho) \cap \Omega$ mit der Reihe überein, denn sowohl f wie auch die Reihe stellen in dieser zusammenhängenden offenen Menge holomorphe Funktionen dar, die in der Nähe von z_0 gleich sind.

Beispiel 17.1 Wir erinnern uns an die Wurzel

$$q : \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{C}\,, \quad q(z) = \sqrt{|z|}\exp\left(\frac{i}{2}\arg z\right) \qquad (-\pi < \arg z < \pi)\,.$$

Wählen wir z_0 im ersten und zweiten Quadranten $(\pi/2 < \arg z < \pi)$, so ist der Konvergenzradius der Taylorreihe von q um z_0 gleich $|z_0|$: dies erkennt man z. B. daran, daß auch

$$\tilde{q} : \mathbb{C}\backslash[0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}\,, \quad \tilde{q}(z) = \sqrt{|z|}\exp\left(\frac{i}{2}\arg z\right) \qquad (0 < \arg z < 2\pi)$$

eine Wurzel ist, die im ersten und zweiten Quadranten mit q übereinstimmt; der Kreis $K(z_0, |z_0|)$ liegt im Holomorphiegebiet von $\tilde{q}$. Es ist $K(z_0, |z_0|) \cap \{\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]\}$ nicht zusammenhängend. Tatsächlich gilt im dritten und vierten Quadranten nicht $q(z) = \tilde{q}(z)$, sondern $q(z) = -\tilde{q}(z)$. Beim Überschreiten der negativen Halbachse hat man den ***zweiten Zweig*** der Wurzel betreten. Setzt man weiter um den Nullpunkt herum fort, so erreicht man beim zweiten Überschreiten der negativen Halbachse wieder den ersten Zweig. #

Beispiel 17.2 Ähnliche Verhältnisse liegen beim Logarithmus vor:

$$\ln : \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{C}\,, \quad \ln z = \ln|z| + i\arg z \qquad (-\pi < \arg z < \pi)\,.$$

Setzt man hier über die negative Halbachse hinweg vom zweiten Quadranten in den dritten Quadranten fort, so erhält man nicht $\ln z$, sondern $\ln z + 2\pi i$. Wiederholt man diesen Prozeß n–mal $(n \in \mathbb{N})$, so erhält man $\ln z + 2\pi n i$. Setzt man vom dritten in den zweiten Quadranten fort, so erhält man $\ln z - 2\pi i$, und entsprechend bei n–facher Wiederholung $\ln z - 2\pi n i$. Der Logarithmus hat unendlich viele Blätter. Setzt man in der gleichen Richtung immer weiter fort, so kommt man nie wieder zum ursprünglichen Blatt (Hauptwert) zurück. #

Beispiel 17.3 Die holomorphe Funktion

$$f : \mathbb{C}\backslash[a,b], \quad f(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)} \qquad (a, b \in \mathbb{R},\ a < b)$$

ist durch $f(z) > 0$ für $z > b$ eindeutig bestimmt (mit der in Beispiel **??** definierten Quadratwurzel). Bei Überqueren des Intervalls (a, b) betritt man den zweiten Zweig (mit Werten $\tilde{f}(z) = -f(z)$). Erneutes Überqueren führt dann zurück auf den ersten Zweig. #

Es sei hier nur kurz darauf hingewiesen, daß der Begriff, mit dem diese Mehrdeutigkeit aufgelöst werden kann, der der ***Riemannschen Fläche*** ist (ein Gebilde, das nur lokal mit der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ identifiziert werden kann): Man betrachtet die Funktion dann nicht mehr als Funktion auf $\mathbb{C}$, sondern als Funktion auf der zu der analytischen Funktion gehörigen Riemann'schen Fläche. Für weitere Informationen sei auf die Literatur verwiesen (z. B. K. Knopp: Funktionentheorie II, H. Behnke und F. Sommer: Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen).

Wir wollen nun den Prozeß der analytischen Fortsetzung genauer studieren: Sei f holomorph bei z_0 (d. h. ein Funktionenkeim bei z_0 sei gegeben: etwa eine Potenzreihe), Γ eine Kurve mit Anfangspunkt z_0 und Endpunkt z_1. Man sagt f läßt sich längs Γ analytisch fortsetzen, wenn es Punkte $w_0 = z_0, w_1, \ldots, w_{n-1}, w_n = z_1$ (die beim Durchlaufen von Γ in dieser Reihenfolge auftreten), zugehörige Radien $r_0, r_1, \ldots, r_n > 0$ und holomorphe Funktionen $f_j : K(w_j, r_j) \longrightarrow \mathbb{C}$ gibt so, daß gilt:

das Kurvenstück von w_j bis w_{j+1} einschließlich der beiden Punkte

ist in $K(w_j, r_j)$ enthalten (***Kreiskette***),

$$f_j(z) = f_{j+1}(z) \qquad \text{für} \quad z \in K(w_j, r_j) \cap K(w_{j+1} r_{j+1}) .$$

z_1

z_0

$f_n(\cdot)$ ist dann holomorph bei z_1; es ist ***durch analytische Fortsetzung längs*** Γ ***mit Hilfe der angegebenen Kreiskette aus*** $f_0 = f$ hervorgegangen.

Satz 17.4 *Die analytische Fortsetzung längs einer (festen) Kurve* Γ *hängt nicht von der Wahl der Kreiskette ab.*

Beweis. Hat man zwei Kreisketten längs Γ, so existiert ein schmaler „Schlauch" längs Γ, der in beiden Kreisketten enthalten ist. Die beiden Fortsetzungen stimmen bei z_0 überein, also im ganzen „Schlauch", und somit insbesondere bei z_1. □

Hilfssatz 17.5 *Sei* f *holomorph bei* z_0 *und in* $K(z_0, r)$ *längs jeder Kurve analytisch fortsetzbar. Dann ist der Konvergenzradius* ϱ *der Taylorreihe von* f *bei* z_0 *mindestens gleich* r.

Beweis. Nehmen wir an, daß $\varrho < r$ gilt. Wir wissen (Korollar **??**), daß dann ein z_1 mit $|z_1 - z_0| = \varrho < r$ existiert so, daß f nicht in einen Kreis um z_1 holomorph fortsetzbar ist. Das ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung. □

Satz 17.6 (Monodromiesatz) *Sei* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *offen und einfach zusammenhängend,* $z_0 \in \Omega$, f *holomorph bei* z_0. *Ist* f *längs jeder Kurve von* z_0 *aus in* Ω *fortsetzbar, so erzeugt die Fortsetzung eine in* Ω *holomorphe Funktion.*

Beweis. Für jedes z_1 erhält man durch Fortsetzung längs einer Kurve Γ von z_0 nach z_1 eine bei z_1 holomorphe Funktion; diese könnte allerdings von der Wahl der Kurve abhängen. Es ist also lediglich zu zeigen: Sind Γ_1 und Γ_2 zwei Kurven in Ω von z_0 nach z_1, so liefert die Fortsetzung längs Γ_1 und Γ_2 das gleiche Resultat.

Da man offenbar die Kreisketten auch so wählen kann, daß jeder Mittelpunkt und das verbindende Kurvenstück auch im folgenden Kreis liegt ($w_j \in K(w_{j+1} r_{j+1})$; die Bedingung $w_{j+1} \in K(w_j, r_j)$ hatten wir schon oben gefordert), kann das Kreiskettenverfahren auch in umgekehrter Richtung durchgeführt werden. Es genügt also zu zeigen: Die Fortsetzung von z_0 aus längs einer geschlossenen Kurve Γ in Ω führt zum ursprünglichen Funktionskeim bei z_0 zurück.

Da die Kurvenstücke zwischen zwei Kreismittelpunkten offenbar keine Rolle spielen, können sie durch geradlinige Verbindungen ersetzt werden, d. h. es genügt sogar zu zeigen: Die Fortsetzung von z_0 aus längs eines geschlossenen Polygonzuges P in Ω führt zum ursprünglichen Funktionskeim bei z_0 zurück.

Dies beweisen wir indirekt. Wir nehmen also an, daß es einen geschlossenen Polygonzug P in Ω gibt, längs dem die Fortsetzung von z_0 aus nicht zum ursprünglichen Funktionskeim zurückführt. Mit Hilfe von inneren Diagonalen von P zerlegen wir P in eine Summe von Dreieckswegen. Dann führt offenbar die Fortsetzung längs (mindestens) eines dieser Dreieckswege nicht zum Ausgangsfunktionskeim zurück. Wie beim Beweis des Cauchy'schen Integralsatzes zerlegen wir dieses Dreieck in 4 „gleiche“ Teile, von denen wieder mindestens eines diese Eigenschaft hat. Dieses wählen wir aus und zerlegen weiter, usf. Damit erhalten wir eine Folge von Dreiecken (D_n), die sich auf einen Punkt $w_0 \in \Omega$ zusammenziehen, und längs denen jeweils die Fortsetzung nicht zum Ausgangsfunktionskeim zurückführt.

Sei $\varrho := \operatorname{dist}(w_0, \mathbb{C}\backslash\Omega)$. Für hinreichend großes n haben alle Eckpunkte von D_n einen Abstand $< \varrho/3$ von w_0. Nach obigem Hilfssatz sind also die Konvergenzradien der Taylorreihe bei allen diesen Eckpunkten $> 2\varrho/3$. Somit liegt das ganze Dreieck D_n in jedem dieser Konvergenzkreise. Dann kann aber die Fortsetzung längs D_n nicht zu einem neuen Funktionskeim führen, ein Widerspruch zur Konstruktion. □

18 Der Weierstraß'sche Produktsatz und der Mittag–Leffler'sche Teilbruchsatz

18.1 Der Weierstraß'sche Produktsatz

Ein Polynom p ist durch seine Nullstellen z_j und deren Vielfachheiten ν_j bis auf einen Faktor $(c \neq 0)$ bestimmt:

$$p(x) = c \prod_{j=1}^{n} (z - z_j)^{\nu_j} .$$

In anderen Worten: zwei Polynome mit den gleichen Nullstellen (einschließlich Vielfachheiten) stimmen bis auf einen Faktor überein.

Sind f und g ganze Funktionen mit gleichen Nullstellen (einschließlich Vielfachheiten), so ist f/g holomorph außerhalb der Nullstellen und läßt sich holomorph in die Nullstellen von f bzw. g hinein fortsetzen zu einer ganzen Funktion h_0. Ist nämlich z_j eine Nullstelle von f und g mit gemeinsamer Vielfachheit ν_j, so gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= (z - z_j)^{\nu_j} \hat{f}(z), \qquad \hat{f} \quad \text{ganz mit} \quad \hat{f}(z_j) \neq 0 , \\ g(z) &= (z - z_j)^{\nu_j} \hat{g}(z), \qquad \hat{g} \quad \text{ganz mit} \quad \hat{g}(z_j) \neq 0 . \end{aligned}$$

Also ist

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\hat{f}(z)}{\hat{g}(z)} =: h_0(z) \qquad \text{holomorph bei} \quad z_j .$$

Es gilt also

$$f(z) = h_0(z)\, g(z) \qquad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C} .$$

Ist h_0 konstant, so existiert ein $h \in \mathbb{C}$ mit $h_0 = \exp(h)$. Ist h_0 nicht konstant, so ist nach dem Satz von der Gebietstreue (Satz **??**) $h_0(\mathbb{C})$ offen und einfach zusammenhängend,

$0 \notin h_0(\mathbb{C})$. Nach Satz **??** existiert eine Logarithmusfunktion Ln auf $h_0(\mathbb{C})$, und mit $h(z) = \mathrm{Ln}(h_0(z))$ gilt $h_0(z) = \exp(h(z))$, also in jedem Fall

$$f(z) = e^{h(z)} g(z)$$

mit einer ganzen Funktion h. Zwei ganze Funktionen mit den gleichen Nullstellen (einschließlich Vielfachheit) stimmen also bis auf einen Faktor $\exp\{h(\cdot)\}$ überein, wobei h eine ganze Funktion ist. Umgekehrt haben natürlich Funktionen, die bis auf einen solchen Faktor übereinstimmen, die gleichen Nullstellen (einschließlich Vielfachheiten).

Es stellt sich die **Frage**: Gibt es zu beliebig vorgegebenen Nullstellen (z_j), wobei der Einfachheit halber eine ν–fache Nullstelle in dieser Folge ν mal vorkommen soll, eine ganze Funktion mit genau diesen Nullstellen? Kann man (ähnlich wie bei Polynomen) eine solche Funktion angeben? Natürlich dürfen sich diese Nullstellen nicht in $\mathbb{C}$ häufen, denn sonst wäre f nach dem Identitätssatz identisch 0.

Wir brauchen noch eine Vorüberlegung: Man sagt, das Produkt $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$ ist ***absolut konvergent***, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |\ln b_n|$ konvergiert. Hieraus folgt die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \ln b_n$ und somit die von $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$.

Hilfssatz 18.1 *Ist* $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n - 1|$ *konvergent, so konvergiert* $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$ *absolut.*

Beweis. Aus $1 = \ln'(1) = \lim\limits_{z\to 0} \ln(1+z)/z$ folgt

$$\frac{1}{2} < \left|\frac{\ln(1+z)}{z}\right| < \frac{3}{2} \qquad \text{für hinreichend kleine } z,$$

also, da $b_n \longrightarrow 1$ gilt,

$$\frac{1}{2}|b_n - 1| < |\ln b_n| < \frac{3}{2}|b_n - 1| \qquad \text{für hinreichend große } n.$$

Hieraus folgt die Konvergenz von $\sum |\ln b_n|$ und somit die Behauptung. □

Satz 18.2 (Weierstraß'scher Produktsatz) *Sei* (z_n) *eine Folge aus* $\mathbb{C}$ *mit* $z_n \longrightarrow \infty$. *Dann gibt es eine ganze Funktion* f, *die genau die Zahlen* z_n *als Nullstellen hat (mit der entsprechenden Vielfachheit). Sind alle* $z_n \neq 0$, *so gibt es Zahlen* $m_n \in \mathbb{N}$ *so, daß*

$$f(z) := \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z}{z_n}\Big) \exp\Big\{\frac{z}{z_n} + \frac{1}{2}\Big(\frac{z}{z_n}\Big)^2 + \ldots + \frac{1}{m_n}\Big(\frac{z}{z_n}\Big)^{m_n}\Big\}$$

eine solche Funktion ist. — Kommt die Zahl 0 *in der Folge* (z_n) ν *mal vor, so ist noch der Faktor* z^ν *hinzuzufügen. (Vergleicht man das Resultat mit den obigen Überlegungen zu Polynomen, so wäre es naheliegend, die* exp*–Terme wegzulassen. Dann würde aber das Produkt i. allg. nicht konvergieren; es handelt sich also lediglich um konvergenzerzeugende Faktoren.)*

Beweis. Es gilt (Taylorentwicklung)

$$\ln(1-w) = -w - \frac{1}{2}w^2 - \frac{1}{3}w^3 - \ldots \quad \text{für} \quad |w| < 1\,,$$

und diese Reihe ist gleichmäßig konvergent z. B. für $|w| < \dfrac{1}{2}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es also ein $m_n \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|\ln(1-w) + w + \frac{1}{2}\,w^2 + \ldots + \frac{1}{m_n}\,w^{m_n}\right| < 2^{-n} \quad \text{für } w \text{ mit } |w| < \frac{1}{2}\,.$$

Wir zeigen, daß mit dieser Folge (m_n) das im Satz angegebene Produkt in jedem Kreis $K(0,r)$ gleichmäßig konvergiert und dort die richtigen Nullstellen (mit den richtigen Vielfachheiten) hat.

Sei $r > 0$ beliebig (aber im folgenden fest). Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, daß $|z_n| > 2r$ für alle $n \geq n_0$ gilt, also

$$\left|\frac{z}{z_n}\right| < \frac{1}{2} \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad |z| < r \quad \text{und alle} \quad n \geq n_0\,.$$

Dann ist aber

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left|\ln\left(1 - \frac{z}{z_n}\right) + \frac{z}{z_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{m_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)^{m_n}\right| \qquad \text{für} \quad |z| < r$$

gleichmäßig konvergent; denn es ist dort jeder Term $\leq 2^{-n}$. Also ist das Produkt

$$\begin{aligned} &\prod_{n=n_0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \exp\left\{\frac{z}{z_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{m_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)^{m_n}\right\} \\ &\quad = \exp\left\{\sum_{n=n_0}^{\infty}\left[\ln\left(1 - \frac{z}{z_n}\right) + \frac{z}{z_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{m_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)^{m_n}\right]\right\} \end{aligned}$$

für $|z| < r$ gleichmäßig konvergent.

Die Grenzfunktion ist also holomorph für $|z| < r$. Sie hat dort keine Nullstelle, denn keiner der Faktoren hat dort eine Nullstelle, also auch keines der Partialprodukte (vgl. Satz ??).

Hinzufügen der fehlenden Faktoren

$$\prod_{n=1}^{n_0-1} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \exp\left\{\frac{z}{z_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{m_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)^{m_n}\right\}$$

ändert nichts an der gleichmäßigen Konvergenz für $|z| < r$ und liefert dort genau die richtigen Nullstellen (mit Vielfachheit). □

Beispiel 18.3 Wir wissen, daß $\sin$ genau die Nullstellen $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots,$ jeweils mit Vielfachheit 1, hat. Da $\sum \frac{|z|^2}{n^2\pi^2}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergiert, sind konvergenzerzeugende Terme hier nicht nötig. Es gilt also

$$\sin z = e^{h(z)} z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n\pi}\right)\left(1 - \frac{z}{n\pi}\right) = e^{h(z)} z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Tatsächlich kann man zeigen, daß $h(z) \equiv 0$ ist (vgl. z. B. K. Knopp: Funktionentheorie II, § 1, 1. Beispiel). #

Korollar 18.4 *Jede in* $\mathbb{C}$ *meromorphe Funktion läßt sich als Quotient zweier ganzer Funktionen schreiben.*

Beweis. Sind z_j die Pole von f mit Ordnungen p_j, so gibt es nach dem Weierstraß'schen Produktsatz eine ganze Funktion g mit den Nullstellen z_j mit Vielfachheit p_j. Dann ist offenbar $h = fg$ zu einer ganzen Funktion fortsetzbar und somit $f = h/g$. □

18.2 Der Mittag–Leffler'sche Teilbruchsatz

Ähnlich wie der Weierstraß'sche Produktsatz eine ganze Funktion mit vorgegebenen Nullstellen liefert, kann man auch eine meromorphe Funktion mit vorgegebenen Hauptteilen an den vorgegebenen Polen z_j konstruieren.

Satz 18.5 (Teilbruchsatz von Mittag–Leffler) *Sei* (z_j) *eine Folge aus* $\mathbb{C}$ *mit* $|z_j| \longrightarrow \infty$ *für* $j \longrightarrow \infty$ *,*

$$h_j(z) = \sum_{n=1}^{p_j} a_{jn}(z - z_j)^{-n}, \qquad j = 1, 2, \ldots$$

Dann gibt es eine bis auf eine ganze Funktion (additiv) eindeutig bestimmte meromorphe Funktion $M_0(\cdot)$ *, die genau die Pole* z_j $(j = 1, 2, \ldots)$ *mit den Hauptteilen* h_j *hat.*

Beweis. Da jedes h_j in $K(0, |z_j|)$ holomorph ist, gibt es zu jedem j ein Polynom

$$g_j(z) = \sum_{n=0}^{n_j} b_{jn} z^n, \qquad j = 1, 2, \ldots$$

mit

$$|h_j(z) - g_j(z)| < 2^{-j} \qquad \text{für} \quad |z| < \frac{z_j}{2}, \quad j = 1, 2, \ldots .$$

Also ist die ***Teilbruchreihe***

$$M_0(z) := \sum_{j=1}^{\infty} (h_j(z) - g_j(z))$$

für jedes $r > 0$ in $K(0, r) \backslash \{z_1, z_2, \ldots\}$ gleichmäßig konvergent, stellt also eine in $K(0, r) \backslash \{z_1, z_2, \ldots\}$ holomorphe Funktion dar, die in $\{z_1, z_2, \ldots\} \cap K(0, r)$ die richtigen Hauptteile hat. Da $r > 0$ beliebig war, hat $M_0(\cdot)$ die gewünschte Eigenschaft. Da sich zwei meromorphe Funktionen mit gleichen Hauptteilen (additiv) nur um eine ganze Funktion unterscheiden, ist die Konstruktion bis auf eine ganze Funktion eindeutig. $\square$

Es sei noch angemerkt, daß diese Konstruktion auch dann geht, wenn statt der Pole wesentliche Singularitäten mit vorgegebenen Hauptteilen vorliegen.

Literatur

Gewöhnliche Differentialgleichungen

[1] Amann, H.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* de Gruyter Lehrbuch, Walter de Gruyter, Berlin/New York 1983

[2] Arnol'd, V. I.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Springer–Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1980

[3] Brown, M.: *Differential equations and their applications.* Applied Mathematical Sciences Vol. 15. Springer–Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1983 bzw. Differentialgleichungen und ihre Anwendungen. Springer–Lehrbuch 2. Auflage 1991

[4] Coddington, E. A. – Levinson, N.: *Theory of ordinary differential equations.* International series in pure and applied mathematics. McGraw–Hill Book Comp., New York/Toronto/London 1955

[5] Endl, K. – Luh, W.: *Analysis I und III, eine integrierte Darstellung*. Akademische Verlagsanstalt, Frankfurt 1983/81

[6] Erwe, F.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* BI Hochschultaschenbuch Band 19. Bibliographisches Institut Mannheim/Wien/Zürich 1964

[7] Forster, O.: *Analysis 2.* Vieweg Studium Band 31, Grundkurs Mathematik. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 1979

[8] Hille, E.: *Lectures on ordinary differential equations.* Addison Wesley Publ. Comp., Reading/Menlo Park/London/Don Mills 1969.

[9] Horn, J. – Wittich, H.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Göschen Lehrbücher Band 10. Walter de Gruyter, Berlin 1960

[10] Jänich, K.: *Analysis für Physiker und Ingenieure – Funktionentheorie und Differentialgleichungen, Spezielle Funktionen.* Ein Lehrbuch für das zweite Studienjahr. Springer–Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1983

[11] Kamke, E.: *Differentialgleichungen – Lösungsmethoden und Lösungen, Band 1: Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Akademische Verlagsgesellschaft Geest und Portig, Leipzig 1962

[12] Knobloch, H. W. – Kappel, F.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Mathematische Leitfäden. B. G. Teubner, Stuttgart 1974

[13] Schäfke, F. W. – Schmidt, D.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen – Die Grundlagen der Theorie im Reellen und Komplexen*. Heidelberger Taschenbücher Band 108. Springer–Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1973

[14] Simmons, G. F.: *Differential Equations with Applications and Historical Notes*. McGraw–Hill International Book Company, USA 1972

[15] Walter, W.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen – Eine Einführung*. Heidelberger Taschenbücher Band 110. Springer–Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1972

[16] Werner, H. – Arndt, H.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen – Eine Einführung in Theorie und Praxis*. Hochschultext. Springer–Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1986

Funktionentheorie

[17] Behnke, H. – Sommer, F.: *Theorie der analytischen Funktion einer komplexen Veränderlichen*. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften Band 77. Springer–Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1962

[18] Cartan, H.: *Analytische Funktionen (einer oder mehrerer komplexen Veränderlichen)*. BI Hochschultaschenbücher Band 112/112a. Bibliographisches Institut, Mannheim 1966

[19] Conway, J. B.: *Functions of one complex variable*. Graduate Texts in Mathematics Vol. 11. Springer–Verlag, New York/Heidelberg/Berlin 1978

[20] Diederich, K. – Remmert, R.: *Funktionentheorie I*. Heidelberger Taschenbücher Band 103. Springer–Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1972

[21] Endl, K. – Luh, W.: *Analysis III, eine integrierte Darstellung*. Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt 1981

[22] Fischer, W. – Lieb, I.: *Funktionentheorie*. Viewegstudium Band 47, Aufbaukurs Mathematik, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 1981

[23] Hurwitz, A. – Courant, R.: *Allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen*. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften Band 3. Springer–Verlag, Berlin/Göttingen(Heidelberg)/New York 1984

[24] Jänich, K.: *Analysis für Physiker und Ingenieure – Funktionentheorhie und Differentialgleichungen, Spezielle Funktionen*. Ein Lehrbuch für das zweite Studienjahr. Springer–Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1983

[25] Jänich, K,: *Einführung in die Funktionentheorie*. Hochschultext, Springer–Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1977

[26] Kneser, H.: *Funktionentheorie*. Studia Mathematica, Mathematische Lehrbücher Band XIII. Vandenhoek und Ruprecht, Göttingen 1966

[27] Knopp, K.: *Elemente der Funktionentheorie / Funktionentheorie I (Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen)/ Funktionentheorie II (Anwendung und Weiterführung der allgemeinen Theorie)*. Sammlung Göschen Band 1109/668/703. Walter de Gruyter, Berlin 1963/1970/1971.

[28] Peschl, E.: *Funktionentheorie I*. Hochschultaschenbücher Band 131/131a. Bibliographisches Institut, Mannheim 1968

[29] Remmert, R.: *Funktionentheorie I*. Grundwissen Mathematik 5. Springer–Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1984