Prof. Dr. A. Werner Frankfurt/M., den 28.1.2008

Übungen zur Einführung in die Algebraische Geometrie I

Blatt 11

1. Es sei B ein graduierter Ring.

   i) Zeigen Sie, dass der Schnitt von zwei homogenen Idealen in B wieder homogen ist.

   ii) Zeigen Sie, dass das Radikal eines homogenen Ideals in B wieder homogen ist.

2. Ein homogenes Ideal $\mathfrak{p} \neq 1$ in dem graduierten Ring B ist genau dann ein Primideal, wenn für alle homogenen Elemente f und g in B gilt: Ist $fg \in \mathfrak{p}$, so folgt $f \in \mathfrak{p}$ oder $g \in \mathfrak{p}$.

3. i) Zeigen Sie, dass für jeden Ring A der nulldimensionale projektive Raum $\mathbb{P}^0_A$ isomorph zu Spec A ist.

   ii) Es sei A ein Ring und $X = \mathbb{P}^n_A$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}_X(X) = A$ gilt. Schliessen Sie daraus, dass für alle $n > 0$ der n-dimensionale projektive Raum $\mathbb{P}^n_K$ kein affines Schema ist.

4. Es sei B ein graduierter Ring und f ein homogenes Element in B vom Grad > 0. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi : D_+(B) \to \operatorname{Spec} B_{(f)}$, definiert durch $\varphi(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}B_f \cap B_{(f)}$ ein Homöomorphismus ist.