Prof. Dr. A. Werner Frankfurt/M., den 10.12.2007

Übungen zur Einführung in die Algebraische Geometrie I
Blatt 7

1. Es sei $f : S \to T$ eine stetige Abbildung topologischer Räume und $\mathcal{F}$ eine Garbe auf S. Zeigen Sie, dass $f_*\mathcal{F}$, definiert durch $f_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U))$, eine Garbe auf T ist.

2. i) Es sei $f : S \to T$ eine stetige Abbildung topologischer Räume, $\mathcal{G}$ eine Garbe auf T sowie $f^{-1}\mathcal{G}$ die Urbildgarbe auf S. Zeigen Sie für jedes $x \in S$

$$(f^{-1}\mathcal{G})_x = \mathcal{G}_{f(x)}.$$

ii) Ist U eine offene Teilmenge von T, ausgestattet mit der Relativtopologie, und $i : U \to T$ die Inklusionsabbildung, so gilt $i^{-1}\mathcal{G}(V) = \mathcal{G}(V)$ für alle offenen Teilmengen $V \subset U$. In diesem Fall schreiben wir auch $i^{-1}\mathcal{G} = \mathcal{G}|_U$ und bezeichnen diese Garbe als Einschränkung von $\mathcal{G}$ auf U.

3. Es sei A ein Ring und S eine multiplikative Teilmenge von A. Für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ in A sei $S^{-1}\mathfrak{a}$ definiert als

$$S^{-1}\mathfrak{a} = \{a/s : a \in \mathfrak{a}, s \in S\}$$

Hier ist a/s wie in der Vorlesung die durch das Paar (a, s) definierte Äquivalenzklasse in $A \times S$.

i) Zeigen Sie, dass $S^{-1}\mathfrak{a}$ ein Ideal in $S^{-1}A$ ist. Ist $j : A \to S^{-1}A$ die natürliche Abbildung $j(a) = a/1$, so ist $S^{-1}\mathfrak{a}$ das von der Teilmenge $j(\mathfrak{a})$ erzeugte Ideal in $S^{-1}A$.

ii) Zeigen Sie, dass genau dann $S^{-1}\mathfrak{a} = S^{-1}A$ gilt, wenn $\mathfrak{a} \cap S \neq \emptyset$ ist.

iii) Es sei $\mathfrak{b}$ ein Ideal in $S^{-1}A$ und $\mathfrak{a} = j^{-1}(\mathfrak{b})$ das Urbildideal. Dann ist kein Element aus S ein Nullteiler im Quotienten $A/\mathfrak{a}$. Umgekehrt gibt es für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ in A, so dass kein Element aus S ein Nullteiler im Quotienten $A/\mathfrak{a}$ ist, ein Ideal $\mathfrak{b}$ in $S^{-1}A$ mit $\mathfrak{a} = j^{-1}(\mathfrak{b})$.

iv) Zeigen Sie dass die Abbildungen $\mathfrak{p} \mapsto S^{-1}\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{q} \mapsto j^{-1}(\mathfrak{q})$ eine bijektive Korrespondenz zwischen den Primidealen in A, die disjunkt zu S sind, und den Primidealen in $S^{-1}A$ vermitteln.

v) Es sei $\mathfrak{p}$ in Primideal in A. Zeigen Sie, das $A_\mathfrak{p}$ ein lokaler Ring ist.

4. Es sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in dem Ring A und S eine multiplikative Teilmenge von A. Es sei $\varphi : A \to A/\mathfrak{a}$ die Quotientenabbildung. Zeigen Sie, dass $T = \varphi(S)$ eine multiplikative Teilmenge von $A/\mathfrak{a}$ ist und dass es einen natürlichen Isomorphismus

$$T^{-1}(A/\mathfrak{a}) \simeq S^{-1}A/S^{-1}\mathfrak{a} \text{ gibt.}$$