Prof. Dr. A. Werner Frankfurt/M., den 14.1.2008

Übungen zur Einführung in die Algebraische Geometrie I
Blatt 10

1. Es seien X und Y Schemata und $\{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Wir versehen alle U_i mit der eingeschränkten Strukturgarbe und erhalten so offene Unterschemata von X. Für einen Morphismus $f : X \to Y$ sei $f_i : U_i \to X \to Y$ die Komposition der offenen Immersion von U_i nach X mit f. Zeigen Sie: Sind f und g Morphismen von X nach Y, so dass $f_i = g_i$ für alle $i \in I$ gilt, dann folgt $f = g$.

2. (Verkleben von Morphismen) Es seien X und Y Schemata und $\{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Wir versehen alle U_i mit der eingeschränkten Strukturgarbe und erhalten so offene Unterschemata von X. Für jedes $i \in I$ sei ein Morphismus von Schemata $f_i : U_i \to Y$ gegeben, so dass für alle $i, j \in I$ die Schemamorphismen $f_i|_{U_i\cap U_j}$ und $f_j|_{U_i\cap U_j}$ gleich sind. Dann existiert ein Morphismus $f : X \to Y$, so dass die Komposition von f mit der offenen Immersion $U_i \hookrightarrow X$ gleich f_i ist.

3. (Verkleben von Garben) Es sei T ein topologischer Raum mit einer offenen Überdeckung $\{U_i\}_{i\in I}$. Gegeben seien Garben $\mathcal{F}_i$ auf U_i sowie Isomorphismen $\alpha_{ij} : \mathcal{F}_i|_{U_i\cap U_j} \to \mathcal{F}_j|_{U_i\cap U_j}$, so dass gilt:

   i) $\alpha_{ii} = \mathrm{id}$ für alle $i \in I$

   ii) $\alpha_{ik} = \alpha_{jk} \circ \alpha_{ij}$ for alle $i, j, k \in I$.

   Dann existiert eine Garbe $\mathcal{F}$ auf T zusammen mit Isomorphismen $\beta_i : \mathcal{F}|_{U_i} \to \mathcal{F}_i$, so dass $\beta_j = \alpha_{ij} \circ \beta_i$ auf $U_i \cap U_j$ für alle $i, j \in I$ gilt.

4. Ist X ein S-Schema, so nennen wir einen S-Morphismus $S \to X$ einen Schnitt von X. Wir bezeichnen die Menge aller Schnitte von X als $X(S)$. Hier fassen wir natürlich S vermöge der Identität als S-Schema auf. Ist $S = \mathrm{Spec}(A)$ ein affines Schema, so schreiben wir auch $X(A)$ statt $X(S)$. Zeigen Sie: Ist k ein Körper und X ein $\mathrm{Spec}(k)$-Schema, so kann man $X(k)$ mit der Menge aller Punkte in X identifizieren, deren Restklassenkörper k ist. (Tipp: Aufgabe 2, Blatt 9)

5. Es sei k ein Körper und $\mathfrak{a}$ ein Ideal im Polynomring $k[X_1, \ldots, X_n]$. Wir betrachten das affine Schema $X = \mathrm{Spec}\; k[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a}$. Es sei Z die Nullstellenmenge von $\mathfrak{a}$, d.h.
$$Z = \{P = (a_1, \ldots, a_n) \in k^n : f(a_1, \ldots, a_n) = 0 \text{ für alle } f \in \mathfrak{a}\}.$$
   Jeder Punkt $P = (a_1, \ldots, a_n)$ in Z definiert ein Ideal $\mathfrak{m}_P = (X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$ in $k[X_1, \ldots, X_n]$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $P \mapsto \mathfrak{m}_P$ eine Bijektion von Z nach $X(k)$ vermittelt.