Prof. Dr. A. Werner Frankfurt/M., den 3.12.2007

Übungen zur Einführung in die Algebraische Geometrie I

Blatt 6

1. Es sei $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Homomorphismus von Garben abelscher Gruppen auf dem topologischen Raum T. Für jede offene Teilmenge U von T sei $(\mathrm{Kern}\, \alpha)(U)$ die Gruppe $\mathrm{Kern}(\alpha_U)$. Zeigen Sie:

   i) $\mathrm{Kern}\, \alpha$ ist eine Untergarbe von $\mathcal{F}$.

   ii) Für jedes $x \in T$ ist $(\mathrm{Kern}\alpha)_x = \mathrm{Kern}(\alpha_x)$, wobei $\alpha_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ die Halmabbildung ist.

   iii) α ist genau dann injektiv, wenn $\mathrm{Kern}\alpha = 0$ ist.

2. Es sei $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Homomorphismus von Garben abelscher Gruppen auf dem topologischen Raum T. Wie in der Vorlesung sei $\mathrm{Bild}\, \alpha$ die Garbifizierung der Prägarbe $\mathrm{Bild}(\alpha_U)$ sowie $i : \mathrm{Bild}\, \alpha \to \mathcal{G}$ der kanonische Garbenmorphismus. Zeigen Sie:

   i) Für alle $x \in T$ vermittelt $i_x : (\mathrm{Bild}\alpha)_x \to \mathcal{G}_x$ einen Isomorphismus von $(\mathrm{Bild}\alpha)_x$ auf $\mathrm{Bild}(\alpha_x) \subset \mathcal{G}_x$.

   ii) Der kanonische Garbenmorphismus $i : \mathrm{Bild}\, \alpha \to \mathcal{G}$ ist injektiv.

3. (Falls Sie etwas Funktionentheorie kennen) Sei T der topologische Raum $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit der üblichen Topologie. Wir definieren Garben $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ auf T durch

   $$\mathcal{F}(U) = \{f : U \to \mathbb{C} : f \text{ holomorph}\}$$

   $$\mathcal{G}(U) = \{g : U \to \mathbb{C}\backslash\{0\} : g \text{ holomorph.}\}$$

   Dabei ist $\mathcal{F}(U)$ eine additive und $\mathcal{G}(U)$ eine multiplikative Gruppe. Der Garbenmorphismus $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ sei gegeben durch

   $$\alpha_U(f) = \exp(f).$$

   Zeigen Sie, dass α ein surjektiver Garbenmorphismus ist, dass aber $\alpha_T : \mathcal{F}(T) \to \mathcal{G}(T)$ nicht surjektiv ist.