Prof. Dr. A. Werner — Frankfurt/M., den 26.11.2007

Übungen zur Einführung in die Algebraische Geometrie I

Blatt 5

1. Es seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Prägarben bzw. Garben abelscher Gruppen auf dem topologischen Raum T. Zeigen Sie, dass die direkte Summe $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$, definiert durch $(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})(U) = \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U)$ für alle offenen Teilmengen U von T, ebenfalls eine Prägarbe bzw. Garbe auf T ist.

2. Es sei $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Homomorphismus von Prägarben abelscher Gruppen auf dem topologischen Raum T. Zeigen Sie, dass α genau dann ein Isomorphismus ist, wenn für jede offene Teilmenge U von T die Abbildung $\alpha_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ ein Isomorphismus ist.

3. Für alle $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die abelsche Gruppe
$$\frac{1}{n}\mathbb{Z} = \{a/n : a \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Q}.$$
Falls m ein Teiler von n ist, so sei $\mu_{mn} : \frac{1}{m}\mathbb{Z} \hookrightarrow \frac{1}{n}\mathbb{Z}$ die Inklusion. Zeigen Sie, dass $\varinjlim \frac{1}{n}\mathbb{Z} = \mathbb{Q}$ ist.

4. Es sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf dem topologischen Raum T, und $s \in \mathcal{F}(U)$ ein Schnitt über der offenen Menge U. Der Träger von s ist definiert als die Menge
$$\mathrm{Supp}(s) = \{x \in U : s_x \neq 0\},$$
wobei s_x der Keim von s in x, also das Bild von s unter der natürlichen Abbildung $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_x$, ist. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Supp}(s)$ eine abgeschlossene Teilmenge von U ist.