Prof. Dr. A. Werner Frankfurt/M., den 19.11.2007

Übungen zur Einführung in die Algebraische Geometrie I

Blatt 4

1. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie Spec$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, indem Sie folgende Aussagen zeigen.

   i) Die Ideale in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sind genau die Teilmengen der Form $d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, wobei d ein Teiler von n ist.

   ii) Sei d ein Teiler von n. Das Ideal $d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist genau dann ein Primideal, wenn d eine Primzahl ist.

2. Bestimmen Sie alle irreduziblen Teilmengen von Spec$\mathbb{Z}$.

3. Sei A ein noetherscher Ring. Ein Primideal $\mathfrak{p}$ in A heißt minimal, falls für jedes Primideal $\mathfrak{q}$ in A gilt: Ist $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$, so folgt $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$. Zeigen Sie:

   i) A hat nur endlich viele minimale Primideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$.

   ii) Spec$A = V(\mathfrak{p}_1) \cup \ldots \cup V(\mathfrak{p}_r)$ ist die Zerlegung von Spec A in irreduzible Komponenten.