Prof. Dr. A. Werner Frankfurt/M., den 12.11.2007

Übungen zur Einführung in die Algebraische Geometrie I
Blatt 3

1. Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zeigen Sie: Ist
$$P = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n(K),$$
so ist $I(P) = (X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$ in $K[X_1, \ldots, X_n]$. Benutzen Sie nicht die Tatsache, dass $(X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$ ein maximales Ideal ist.

2. Es sei k ein Körper und $B = k[X_1, X_2]/(X_1^2 - X_2^3 + X_1)$. Bestimmen Sie algebraisch unabhängige Elemente $y_1, \ldots y_m$ in B, so dass B ein endlich erzeugter $k[y_1, \ldots, y_m]$-Modul ist.

3. Es sei A ein Ring und $f, g \in A$. Zeigen Sie:

   i) $D(fg) = D(f) \cap D(g)$

   ii) $D(f) = \emptyset$ genau dann, wenn $f \in \sqrt{(0)}$. Das Radikal $\sqrt{(0)}$ des Nullideals heißt auch Nilradikal von A.

   iii) $D(f) = \text{Spec } (A)$ genau dann, wenn f eine Einheit in A ist.

4. i) Zeigen Sie, dass für jeden Ring A die abgeschlossenen Punkte von $\text{Spec}(A)$ genau die maximalen Ideale in A sind.

   ii) Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und A und B endlich erzeugte K-Algebren. Zeigen Sie: Für jeden Homomorphismus $\varphi : A \to B$ von K-Algebren bildet die zugehörige Abbildung
$$f : \text{Spec}(B) \to \text{Spec}(A)$$
abgeschlossene Punkte in abgeschlossene Punkte ab.