Prof. Dr. A. Werner Frankfurt/M., den 25.10.2007

Übungen zur Einführung in die Algebraische Geometrie I
Blatt 2

1. Zeigen Sie, dass folgende Mengen algebraische Mengen sind:

   i) $SL(n,\mathbb{C}) = \{A \in Mat(n \times n, \mathbb{C}) : detA = 1\}$

   ii) $U(n,\mathbb{C}) = \{A \in Mat(n \times n, \mathbb{C}) : \overline{U}^t U = E_n\}$.

2. Sei A ein Ring und $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal. Zeigen Sie, dass $\sqrt{\mathfrak{a}} = \{f \in A : f^k \in \mathfrak{a}$ für ein $k \geqq 1\}$ ein Ideal in A ist.

3. Zeigen Sie: Die Zariski-Topologie auf $\mathbb{A}^1(K)$ ist nicht Hausdorff'sch. Mit anderen Worten: Es gibt Punkte $x \neq y$ in $\mathbb{A}^1(K)$, so dass für alle offenen Umgebungen U von x und alle offenen Umgebungen V von y gilt, dass $U \cap V \neq \emptyset$ ist.

4. Es sei K ein Körper mit unendlich vielen Elementen. Zeigen Sie, dass es für jedes Polynom $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$ mit $f \neq 0$ ein Element $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n(K)$ gibt mit $f(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$. Ist K ein algebraisch abgeschlossener Körper, so gilt also für jedes $f \neq 0$ in $K[X_1, \ldots, X_n]$, dass $V(f) \neq \mathbb{A}^n(K)$ gilt.