Prof. Dr. A. Werner Frankfurt/M., den 18.10.2007

**Übungen zur Einführung in die Algebraische Geometrie I**

Blatt 1

1. i) Ist $f : A \to B$ ein Ringhomomorphismus und $\mathfrak{b} \subset B$ ein Ideal in $B$, so ist $f^{-1}(\mathfrak{b})$ ein Ideal in $A$.

   ii) Ist $f : A \to B$ ein surjektiver Ringhomomorphismus und $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal, so ist $f(\mathfrak{a})$ ein Ideal in $B$.

2. Es sei $f : A \to B$ ein Ringhomomorphismus.

   i) Ist $\mathfrak{p} \subset B$ ein Primideal, so ist auch $f^{-1}(\mathfrak{p})$ ein Primideal in $A$.

   ii) Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass das Urbild eines maximalen Ideals kein maximales Ideal sein muss.

3. i) Ist $\mathfrak{m} \subset A$ ein Ideal, so ist $A/\mathfrak{m}$ genau dann ein Körper, wenn $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal ist.

   ii) Ist $\mathfrak{a} \underset{\neq}{\subset} A$ ein Ideal, so existiert ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \subset A$, das $\mathfrak{a}$ enthält.

4. Beweisen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen für einen Ring $A$:

   i) $A$ ist noethersch.

   ii) Jede aufsteigende Kette von Idealen in $A$ wird stationär.

   iii) Jede nicht-leere Menge von Idealen besitzt ein maximales Element bzgl. der Inklusion.