

*Orts- und zeitaufgelöste
Elektronendichte eines gepulsten induktiv
gekoppelten Entladungsplasmas*

Bachelorarbeit



vorgelegt beim Fachbereich Physik
der Goethe-Universität
in Frankfurt am Main

von

Florian Senzel

Frankfurt am Main, 22. September 2009

Betreuer: Prof. Dr. Joachim Jacoby

Zusammenfassung

In der vorliegenden Bachelorarbeit wurde ein Modell für die räumlich und zeitlich aufgelöste Elektronendichteverteilung in einem gepulsten induktiv gekoppelten Plasma erstellt. Experimentell war es, bedingt durch den gepulsten Betrieb und die Wahl der Diagnostikmethode im Experiment „Prometheus“, nur möglich über die Zeit und den Ort gemittelte Elektronendichten zu messen.

Um nun den räumlichen Verlauf der Elektronendichte zu bestimmen, wurde die räumliche Elektronendichteverteilung durch eine ambipolare homogene Diffusion beschrieben. Die daraus resultierende Differentialgleichung wurde mithilfe von sphärischen Koordinaten unter Annahme von Azimutal- und Polarwinkelsymmetrie gelöst.

Der zeitliche Elektronendichteverlauf wurde durch die, für diesen Elektronendichtebereich gültige, Proportionalität zwischen elektrischer Leistung im Plasma und Elektronendichte berechnet. Die elektrische Leistung und deren zeitlicher Verlauf im Plasma ließ sich über ein Photodiodensignal im experimentellen Aufbau ermitteln.

Das so ermittelte Modell wurde auf die gemessenen integrierten Elektronendichten des Experiments „Prometheus“ angewendet. Durch das Modell ließ sich eine Aussage über die tatsächliche maximale Elektronendichte innerhalb des Entladungspulses treffen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	7
2	Theorie der induktiven Entladungsplasmen	11
2.1	Prinzip der elektromagnetischen Induktion	11
2.2	Zündkriterium für induktive Plasmaentladungen	14
2.3	Transformatortheorie	17
2.4	Diffusion in einem induktiv gekoppelten Plasma	20
2.5	Bessel'sche Differentialgleichung und ihre Lösung	23
3	Experimenteller Aufbau	27
3.1	Entladungsgefäß	27
3.2	Diagnostik	31
4	Räumliche und zeitliche Elektronendichteverteilung	35
4.1	Ortsauflösung	35
4.2	Zeitauflösung	38
4.3	Anwendung des Modells auf ein induktiv gekoppeltes Plasma	41
5	Ausblick	47
A	Wichtige Integralrechnungen	49
A.1	Räumliche Mittelung der räumlichen Elektronendichte $n_e(r)$	49
A.2	Integralrechnungen	49

1 Einführung

Als Plasma (gr. *plásma*, „formbarer Stoff“) bezeichnet man ein partiell oder vollständig ionisiertes Gas, bestehend aus positiv geladenen Ionen (gr. *ión*, „gehend“) und negativen Elektronen (gr. *elektron*, „Bernstein“). Untersucht wurde der Plasma-Zustand zuerst von Irving Langmuir, der ihm auch seinen Namen gab. Die geladenen Teilchen entstehen überwiegend durch Ionisationsstöße der Elektronen und Neutralgasteilchen. Um dem Rekombinationsbestreben der geladenen Teilchen entgegenzuwirken, muss dem Plasma kontinuierlich Energie zugeführt werden, die dem Potential entgegenwirkt. Die hierzu nötige Energie kann z.B. durch thermische Anregung (Erhitzen), Komprimierung (adiabatische Zustandsänderung) oder einen elektrischen Strom (Ohmsche Heizung) bereitgestellt werden. Die Eigenschaften eines Plasmas sind dabei abhängig von seiner Temperatur bzw. seiner Teilchendichte. Eine Einteilung der bis heute bekannten Plasmen ist in Abb. 1 dargestellt.

Plasmen lassen sich in einer Vielzahl von Anwendungsgebieten finden. Dazu gehört z.B. die Verwendung als Ätzmittel in der Prozesstechnik zur Herstellung von Halbleitern. Solche Plasmen werden auch als „Prozessplasmen“ bezeichnet [GR98]. Ein weiteres Anwendungsgebiet von Entladungplasmen ist die Atomspektroskopie [Gey08]. Dabei regt das Plasma die Atome der zu untersuchenden Substanz an. Diese angeregten Zustände emittieren elementspezifische Spektrallinien, die Rückschlüsse auf die Substanzzusammensetzung ermöglichen. Außerdem wird das von Plasmen emittierte Licht, das durch die Anregungsstöße von Elektronen mit Neutralgasteilchen entsteht, zum Beispiel in Leuchtstoffröhren verwendet.

Die spannendste und für den weiteren technologischen Fortschritt viel versprechendste Anwendung von Plasmen liegt jedoch in der Fusionsforschung. Dabei versucht man, ähnlich den Vorgängen im Sonneninneren, Atomkerne zu fusionieren und die dabei freiwerdende Bindungsenergie zu nutzen. Aufgrund der hierzu notwendigen hohen Temperaturen liegt das zu fusionierende Medium in Form eines Plasmas vor. Mögliche Konzepte für die Bereitstellung der erforderlichen Einschlusszeiten bzw. Dichten sind die *Trägheitsfusion* und die *Magnetfusion*. Dabei beruht Erstere auf der hohen Komprimierung und den Teilchen-

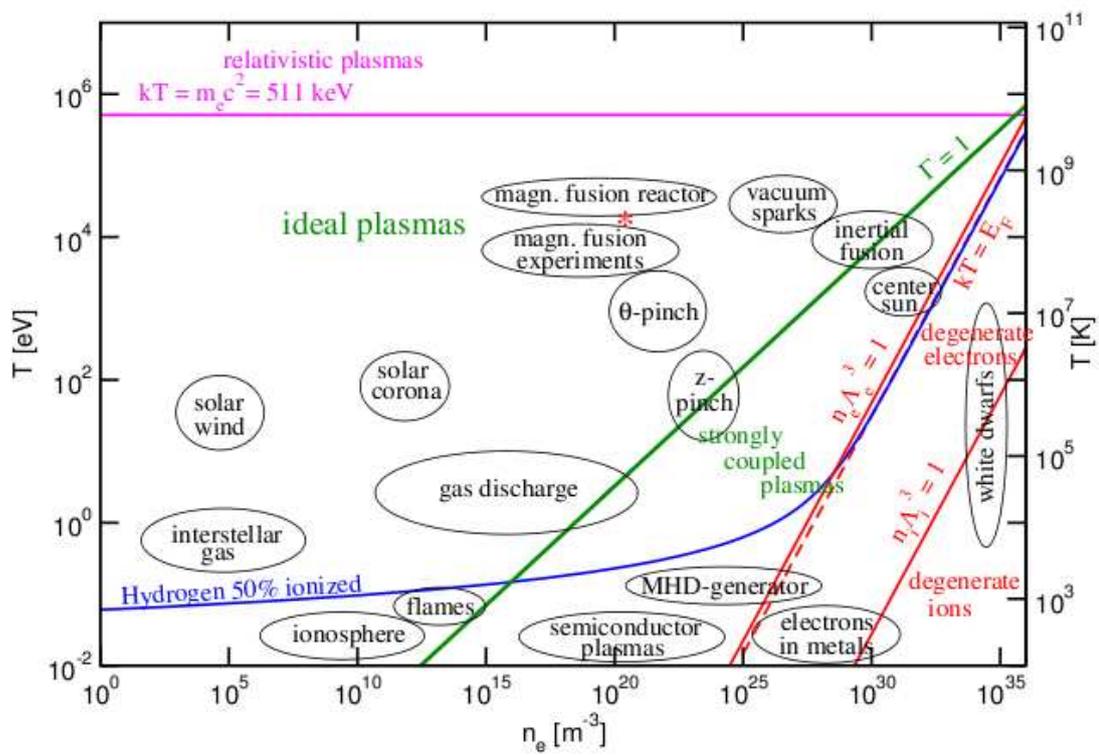


Abbildung 1.1: Typische Plasma-Parameter nach [IPP06]

einschluss durch Trägheitseffekte und Zweitere auf dem Einschluss des Plasmas mithilfe von Magnetfeldern. Entscheidende Fortschritte in der Fusionsforschung verspricht man sich vom geplanten Fusionstestreaktor *ITER*. Sollte der Fusionsreaktor *ITER* es schaffen, einen Energieüberschuss herzustellen, wäre es möglich, in Zukunft Atomkraftwerke durch Fusionskraftwerke zu ersetzen, die sich sowohl durch eine wesentlich höhere Sicherheit als auch strahlungsarme und regenerierbare Treibstoffe auszeichnen.

In der vorliegenden Bachelorarbeit wurde ein gepulstes induktiv angeregtes niederfrequentes Gasentladungsplasma untersucht. Solche Entladungsplasmen werden häufig in der Halbleiterindustrie und in der Atomspektroskopie verwendet und ermöglichen eine hohe Teilchendichte bei gleichzeitig relativ geringem Druck. Entladungsplasmen besitzen im Gegensatz zu z.B. den Plasmen der Fusionsforschung eine wesentlich geringere Elektronentemperatur.

Der Vorteil von induktiv gekoppelten Plasmen liegt in der elektrodenlosen Anregung des Plasmas, sodass Materialverunreinigungen durch Elektrodenabnutzung ausgeschlossen werden können. Jedoch führt die Anbringung der Spulen an das Entladungsgefäß bzw. die normalerweise verwendete Hochfrequenzanregung zu einer verminderten Energiedissipation im Plasma, sodass die obere Teilchenzahldichte für induktive Plasmaentladungen bei $n_e \approx 10^{18} m^{-3}$ [LL94] liegt. Mit dem hier verwendeten Experiment wurden jedoch von C. Teske und J. Jacoby [TJ08] Elektronendichten mit bis zu $n_e \approx 10^{21} m^{-3}$ gemessen, die zumindest im Teilchendichtebereich von Fusionsexperimenten liegen. Erreicht wird dies durch den gepulsten Betrieb der Plasmaentladung. Dabei treten im Gegensatz zum Dauerbetrieb extrem hohe Leistungsdichten auf.

Aufgrund des gepulsten Betriebs der Entladung, stellt die gemessene Elektronendichte eine zeitlich und räumlich gemittelte Größe dar. Aufgabe dieser Bachelorarbeit war es nun, aus den gemittelten Größen, analytisch eine räumliche und zeitliche Elektronendichteverteilung zu erstellen. Dazu wurden, mithilfe der homogenen Diffusionsgleichung und einem gemessenen zeitlichen Intensitätsverlauf, Rückschlüsse auf die Elektronendichte als Funktion der Zeit und der Raumkoordinaten gezogen. Somit kann eine Aussage über die tatsächliche maximale Elektronendichte während des Entladungspulses getroffen werden. In Kapitel 2 werden zunächst die theoretischen Grundlagen zum Verständnis der induktiven Plasmaentladung zusammengefasst. Den experimentellen Aufbau beschreibt Kapitel 3. Im darauffolgenden Kapitel 4 wird die Modellierung der räumlich und zeitlich aufgelösten Elektronendichte durchgeführt und auf gemessene Elektronendichten angewendet. Einen Ausblick auf die noch weiteren Schritte und die Anwendung der gewonnenen Erkenntnisse gibt Kapitel 5.

2 Theorie der induktiven Entladungsplasmen

Das folgende Kapitel soll die theoretischen Grundlagen für die Bestimmung der räumlich und zeitlich aufgelösten Elektronendichte schaffen. Dabei erläutert Kapitel 2.1 das Phänomen der elektromagnetischen Induktion im Allgemeinen.

In Kapitel 2.2 wird die Zündbedingung für das vorliegende kugelsymmetrische induktiv angeregte Plasma hergeleitet. Um die elektrischen Parameter im Plasma zu bestimmen wird das Transformatormodell in Kapitel 2.3 vorgestellt. Die Diffusion der Teilchen in einem Plasma wird in Kapitel 2.4 behandelt. Um die Diffusionsgleichung in Kugelkoordinaten lösen zu können, muss eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung gelöst werden. Eine Lösungsmethode des radialen Teils der Differentialgleichung wird in Kapitel 2.5 vorgestellt.

2.1 Prinzip der elektromagnetischen Induktion

Im Jahr 1831 entdeckte Michael Faraday, dass nicht nur elektrische Ströme magnetische Felder verursachen, sondern auch zeitlich veränderliche Magnetfelder elektrische Wirbelfelder zur Folge haben [Mes02]. Dieses Phänomen wird *elektromagnetische Induktion* (lat. *inducere* = einführen) genannt. Faraday entdeckte folgenden Zusammenhang:

$$U_{\text{ind}} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (2.1)$$

Dabei ist $\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$ der magnetische Fluss durch eine Leiterschleife. Ändert man also das Magnetfeld durch eine Leiterschleife bzw. verändert man die vom Magnetfeld durchflossene Fläche, so wird eine Spannung in der Leiterschleife induziert, die bei Vorhandensein eines Widerstands zu einem elektrischen Strom führt. Aufgrund von $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

ist dabei die Wahl der Fläche A unerheblich [Gre08].

Man unterscheidet zwischen *Bewegungsinduktion* und *Ruheinduktion* [P⁺05]. Erstere kann über die Lorentzkraft $\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$ auf die Elektronen im Leiter erklärt werden, die durch die Bewegung der Leiterschleife relativ zum Permanentmagneten entsteht. Diese Kraft führt zu einer Trennung der Ladungen im Leiter und folglich zu einem elektrischen Feld, das die Ladungstrennung versucht zu kompensieren. Ruheinduktion tritt auf, wenn das Magnetfeld durch die Leiterschleife zeitlich verändert wird und somit eine magnetische Flussänderung auftritt, die wiederum eine elektrische Spannung zur Folge hat. Auf diesem Prinzip basiert die Funktionsweise eines Transformators (s. Kap. 2.3).

Die Polung der induzierten Spannung bzw. die Richtung des resultierenden elektrischen Stroms wird durch die *Lenz'sche Regel* bestimmt. Diese besagt, dass die entstehenden elektrischen Felder immer so gerichtet sind, dass sie ihrer Ursache entgegenwirken [P⁺05]. Dies ist eine unmittelbare Forderung aus der Energieerhaltung, da sonst eine „Aufschaukelung“ des Stroms stattfinden könnte. Die *Lenz'sche Regel* wird im Induktionsgesetz durch das negative Vorzeichen berücksichtigt.

Die vorhergehende Betrachtung hat eine Leiterschleife vorausgesetzt, in der eine Spannung induziert wird. Jedoch findet auch elektromagnetische Induktion statt, wenn anstatt einer Leiterschleife ein beliebiger Integrationsweg außerhalb eines Leiters verwendet wird. Dies führt zu elektrischen Wirbelfeldern. In dieser Form wird das Faraday'sche Induktionsgesetz auch als zweite Maxwell'sche Gleichung im Vakuum bezeichnet. Verwendet man den *Stoke'schen Integralsatz*, so erhält man das Faraday'sche Induktionsgesetz in Differentialform:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.2)$$

Das Phänomen der Induktion führt außerdem zu einem verzögerten Stromanstieg in Spulen. In diesen wird beim Einschalten eines Stroms ein magnetisches Feld erzeugt, das wiederum eine ihr entgegengerichtete Induktionsspannung (*Lenz'sche Regel*) zur Folge hat. Somit wird also der Stromanstieg in der Spule reduziert und der Strom nimmt erst verzögert sein Maximum an. In umgekehrter Reihenfolge findet beim Ausschalten ein Aufrechterhalten des Stroms für kurze Zeit statt. Diese Erscheinungen werden auch als *Selbstinduktion* bezeichnet. Quantifiziert wird die Selbstinduktion über folgende Gleichung [P⁺05]:

$$U_{ind} = -L \dot{I} \quad (2.3)$$

Dabei wird L als (Eigen-)Induktivität bezeichnet. Sie ist ein Parameter, der durch die Bauweise der Spule bzw. Leiterschleife bestimmt wird. Für eine kreisförmige Spulenkonfi-

guration mit Radius r_0 und Windungszahl N gilt nach [Jac99]:

$$L = \mu_0 \pi r_0^2 C(N) \quad (2.4)$$

Dabei ist $C(N)$ eine Konstante, die abhängig von der Windungszahl N ist.

Werden zwei Spulen vom gleichen magnetischen Fluss Φ durchflossen, wie es z.B. in einem Transformator geschieht, so wird durch die Flussänderung in der einen Spule eine Spannung in der anderen Spule induziert. Diese Abhängigkeit wird mithilfe der *Gegeninduktion* M [Stö05] beschrieben. Für die Gegeninduktivität M gilt nach [P⁺92]:

$$M = k \sqrt{L_1 L_2} \quad (2.5)$$

Dabei ist L_i die Eigeninduktivität der Spule i und k der Kopplungsfaktor, also der Anteil des magnetischen Flusses der ersten Spule, der die zweite Spule durchsetzt.

2.2 Zündkriterium für induktive Plasmaentladungen

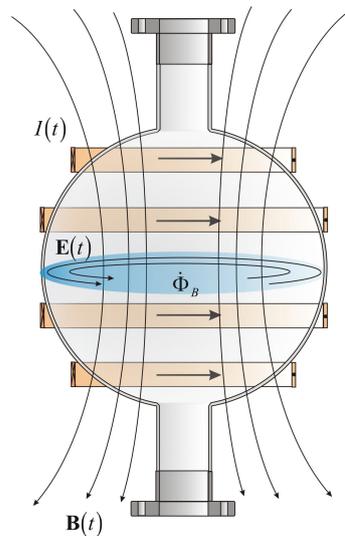


Abbildung 2.1: Schema einer induktiven Plasmaentladung

Man spricht von einem Zünden des Plasmas, wenn die Erzeugungsrate von freien Elektronen den Verlust von Elektronen durch Rekombination bzw. durch Verlust an den Gefäßwänden übersteigt. Mögliche Methoden zur Erzeugung von Entladungsp拉斯men sind unter anderem die induktive und die kapazitive Anregung.

In dem in dieser Bachelorarbeit betrachteten Fall handelt es sich um eine induktive Plasmazündung. Eine solche Entladung ist in Abb. 2.1 dargestellt. Dabei wird durch den zeitlich veränderlichen Strom durch die Induktionsspule ein zeitlich veränderliches Magnetfeld aufgebaut, das nach Kap. 2.1 elektrische Wirbelfelder zur Folge hat. Nur wenn die induzierten elektrischen Felder einen Grenzwert überschreiten, haben die beschleunigten Elektronen genügend Energie, um das Plasma aufrecht zu halten [TJ08].

Die Methode der induktiven Plasmaentladung hat den enormen Vorteil, dass durch die elektrodenlose Bauweise, mögliches Sputtern, d.h. Materialauflösung in den Elektroden verhindert wird. Allerdings findet aus dem gleichen Grund auch keine Sekundärelektronenemission aus dem Elektrodenmaterial statt. Die freien Elektronen werden fast ausschließlich in Ionisationsstößen produziert. Somit ist es schwieriger die Bedingung für eine Plasmazündung zu erreichen und das bekannte *Paschen-Gesetz für Gleichstromentladungen* [Kih52] kann nicht verwendet werden.

Ist die Rekombinationsrate im Vergleich zu den Gefäßwandeffekten vernachlässigbar, so findet ein Transport an Elektronen näherungsweise nur durch Diffusion statt [Tes]. Zum Zeitpunkt der Initiierung des Plasmas ist die Elektronendichte näherungsweise konstant,

sodass die zeitlich homogene Diffusionsgleichung gilt (vgl. Kap. 2.4). Löst man diese mithilfe von Bessel-Funktionen unter der Annahme einer verschwindenden externen Elektronenquelle und unter Berücksichtigung eines kugelsymmetrischen Volumens mit Axial- und Azimutalsymmetrie, so erhält man für den Elektronendichteverlauf (ausführlichere Herleitung s. Kap. 4):

$$n_e(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \left(A \frac{\sin(kr)}{r} - B \frac{\cos(kr)}{r} \right) \quad \text{mit } k^2 = \frac{\nu_{iz}}{D} \quad (2.6)$$

Da die Elektronendichte in den Gefäßwänden verschwindet ($n_e(r \rightarrow r_0) = 0$) und die Elektronendichte in der Mitte der Kugel den Maximalwert $n_{e,0}$ annehmen soll, folgt:

$$n_e(r) = n_{e,0} \frac{\sin(kr)}{kr} \quad (2.7)$$

Aufgrund von der oben gestellten Bedingung einer verschwindenden Elektronendichte in den Gefäßwänden, muss zusätzlich $k = \frac{\pi}{r_0}$ gelten. Definiert man nun die *mittlere Diffusionslänge* als $\Lambda = \frac{r_0}{\pi}$ mit dem Gefäßradius r_0 , so erhält man einen Zusammenhang zwischen Stoßfrequenz ν_{iz} und der zugrundeliegenden Geometrie:

$$\nu_{iz}(E_{ind}) = \frac{D_a}{\Lambda^2} \quad (2.8)$$

Die Ionisationsfrequenz ist dabei eine Funktion der induzierten elektrischen Feldstärke. Analog zur Herleitung des Paschengesetzes für Gleichstromentladungen [Kih52], lässt sich die Kollisionsfrequenz ν_{iz} durch die Ionisationsrate X_{iz} beschreiben:

$$\nu_{iz}(E_{ind}) = n_g X_{iz}(E_{ind}) \quad (2.9)$$

Nach [LL94] lässt sich die Ionisationsrate X_{iz} durch eine Arrheniusfunktion $X_{iz} = X_0 e^{-\frac{C_2 p}{E_{ind}}}$ nähern. Dabei ist C_2 eine gasabhängige Konstante, die experimentell bestimmt werden muss. Somit lässt sich mit Gl. 2.8 und 2.9 insgesamt folgern:

$$e^{-\frac{C_2 p}{E_{ind}}} = \frac{D_a}{n_g X_0 \Lambda^2} \quad (2.10)$$

Definiert man sich eine zweite Konstante $C_1 p = \frac{n_g X_0}{D_a}$, so erhält man das für die Plasma-

zündung notwendige induzierte elektrische Feld:

$$E_{ind} = \frac{C_2 p}{\ln(C_1 p \Lambda^2)} \quad (2.11)$$

Für den maximalen Umfang im Plasma gilt mit der oben genannten Definition $l = 2\pi^2 \Lambda$. Die resultierende induzierte Spannung durch das elektrische Feld lässt sich mithilfe der Integration entlang des Umfangs berechnen:

$$U_{ind} = \int_l \vec{E}_{ind} \cdot d\vec{s} = 2\pi^2 \Lambda E_{ind} \quad (2.12)$$

Mit den Überlegungen aus Kap. 2.1 erhält man die Bedingung für eine Plasmazündung in Abhängigkeit von der mittleren Diffusionslänge Λ und der Induktivität L :

$$\dot{I} = \frac{C_2 p \Lambda}{L \ln(C_1 p \Lambda^2)} \quad (2.13)$$

Berücksichtigt man nun noch die Korrelation zwischen der Induktivität der eng an das Glasgefäß anliegenden Induktionsspulen L und dem Entladungsradius r_0 bzw. der mittleren Diffusionslänge Λ wie in Gl. 2.4, so erhält man nach Zusammenfassen der Konstanten in $A_1 = \frac{C_1}{\pi^2}$ bzw. $A_2 = \frac{C_2}{\mu_0 \pi C(N)}$:

$$\dot{I} = \frac{A_2 p}{\ln(A_1 p r_0^2)} \quad (2.14)$$

Physikalisch besagt Gl. 2.14, dass die für eine Plasmazündung notwendige Stromanstiegsrate antiproportional zum Gefäßradius ist. Somit ist also eine möglichst große Entladungssphäre zu bevorzugen, um die nötige Stromanstiegsrate möglichst gering zu halten.

2.3 Transformatortheorie

Eine Plasmaentladung besitzt einen stark nicht linearen Charakter. Somit ist eine Aussage über den Strom- bzw. Spannungsverlauf im Plasma und die im Plasma dissipierte Leistung nicht trivial. Jedoch vereinfacht sich der Sachverhalt durch die Betrachtung des Plasmas als sekundärseitige niederohmige Last mit Windungszahl $N_{\text{Plasma}} = 1$ eines realen Transformators mit Luftkern (s. Abb. 2.2) [P⁺92]. Ein realer Transformator zeichnet sich durch eine verminderte Durchdringung der magnetischen Flüsse in den beiden Spulen aus. Dies wird durch einen Kopplungsfaktor $k^2 \in [0, 1]$ berücksichtigt. Damit gilt für die Gegeninduktivität:

$$M^2 = k^2 L_0 L_p \quad (2.15)$$

Mithilfe der Eigenschaften des Systems aus primärseitigem Schaltkreis und sekundärsei-

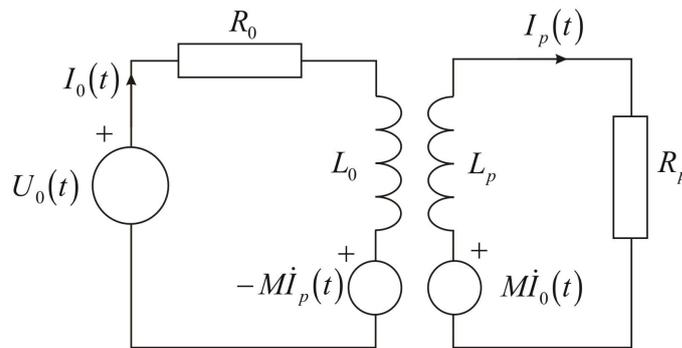


Abbildung 2.2: Schaltschema der Plasmaentladung im Transformatormodell

tigem Plasma, R (ohmscher Widerstand), L (Eigeninduktivität), M (Gegeninduktivität) und ω (Anregungsfrequenz), lassen sich Aussagen über den im Plasma induzierten Strom I_p und die im Plasma dissipierte Leistung P_{Plasma} treffen. Mithilfe der 2. Kirchhoff'schen Regel lässt sich folgendes Differentialgleichungssystem aufstellen:

$$U_0(t) + U_{R_0} + U_{L_0} + U_M = 0 \quad (2.16)$$

$$U_{R_p} + U_{L_p} + U_M = 0 \quad (2.17)$$

Durch das ohmsche Gesetz $U_R = RI$ bzw. der Definition der Induktivitäten bzw. Gegeninduktivitäten $U_L = -L\dot{I}$ und $U_M = -M\dot{I}$ ergibt sich folgendes gekoppeltes Differentialgleichungssystem. Dabei geht man von einer sinusförmigen Eingangsspannung

aus:

$$L_0 \dot{I}_0(t) + M \dot{I}_p(t) + R_0 I_0(t) = U_0 \sin(\omega t) \quad (2.18)$$

$$L_p \dot{I}_p(t) + M \dot{I}_0(t) + R_p I_p(t) = 0 \quad (2.19)$$

Dieses DGL-System lässt sich per Laplace-Transformation lösen [Tes]. Dadurch erhält man den elektrischen Strom im Plasma in Abhängigkeit vom Eingangsstrom I_0 , der Gegeninduktivität M , dem Plasmawiderstand R_p und der Induktivität des Plasmas L_p :

$$I_p(\omega) = -\frac{i\omega M}{R_p + i\omega L_p} I_0(\omega) \quad (2.20)$$

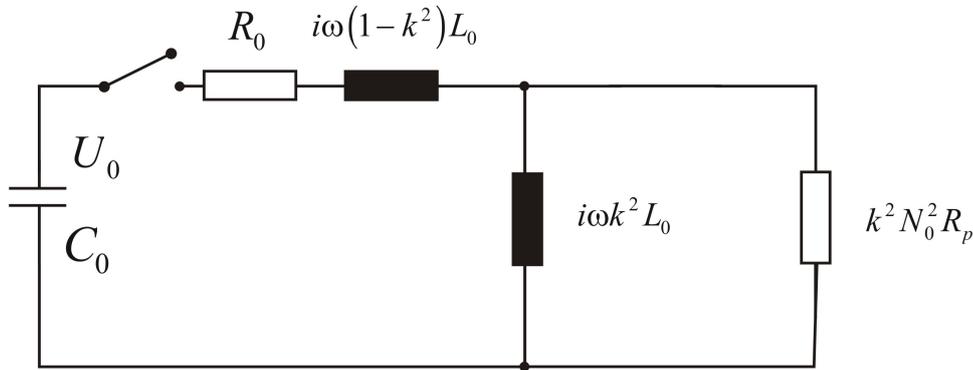


Abbildung 2.3: Vereinfachtes Ersatzschaltbild des Transformators

Da L_p und R_p unbekannte Größen sind, transformiert man den oben genannten Schaltkreis in einen äquivalenten geradlinigen Schaltkreis wie in Abb. 2.3 dargestellt. Somit hat man einen RL-Kreis mit dem Ersatzwiderstand R_e und der Ersatzinduktivität L_e . Für diese gilt nach [P⁺92] mit $\omega \ll \nu$:

$$R_e = R_0 + \omega^2 R_p \frac{M^2}{|Z_p|^2} \quad (2.21)$$

$$L_e = L_0 - \omega^2 L_p \frac{M^2}{|Z_p|^2} \quad (2.22)$$

Dabei ist Z_p die komplexe Impedanz im Plasma. Geht man nun noch von geringen ohmschen Verlusten im Schaltkreis und im Plasma gegenüber den entsprechenden Impedanzen

aus, ergibt sich mit Gl. 2.15:

$$L_e = L_0 - L_p \frac{\omega^2 k^2 L_0 L_p}{(R_p^2 + \omega^2 L_p^2)} \quad (2.23)$$

$$\approx L_0(1 - k^2)$$

$$R_e = R_0 + R_p \frac{\omega^2 k^2 L_0 L_p}{(R_p^2 + \omega^2 L_p^2)} \quad (2.24)$$

$$\approx R_0 + R_p k^2 \frac{L_0}{L_p}$$

$$= R_0 + R_p k^2 N_0^2$$

Dabei wurde in Gl. 2.24 davon ausgegangen, dass die Eigeninduktivität proportional zum Quadrat der Windungszahl ist. Somit ergeben sich folgende Widerstände im Schaltkreis:

$$\omega L_e = \omega L_0(1 - k^2) \quad (2.25)$$

$$R_e = R_0 + k^2 N_0^2 R_p \quad (2.26)$$

Setzt man die gewonnenen Zusammenhänge in Gl. 2.20 ein, so erhält man mit den gemachten Näherungen für den Strom im Plasma:

$$\boxed{I_p = k N_0 I_0} \quad (2.27)$$

Analog zu den vorhergehenden Überlegungen erhält man auch eine Abhängigkeit der im Plasma induzierten Spannung vom Kopplungsfaktor k :

$$\boxed{U_p = \frac{k}{N_0} U_0} \quad (2.28)$$

Somit ist, wie erwartet, der elektrische Strom im Plasma um den Faktor k kleiner als der ursprünglich angelegte Strom in den Spulen. Auch die Spannung ist analog um den Faktor k kleiner als im Fall eines idealen Transformators.

Diese Betrachtungsweise des Transformatormodells hat jedoch bei der Verwendung von HF-Plasmen oberhalb von $\omega = 100$ kHz seine Grenzen [Tes]. Dort treten nicht mehr vernachlässigbare parasitäre Spulenkapazitäten auf. Deshalb wird eine induktive Plasmakopplung immer schwieriger, da die Verschiebungsströme über die parasitären Spulenkapazitäten mit steigender Anregungsfrequenz zunehmen.

2.4 Diffusion in einem induktiv gekoppelten Plasma

Stoßen zwei Teilchen in einem Plasma zusammen, so führt das zu einer kleinen Änderung des Impulses der Teilchen [GR98]. Betrachtet man nun eine Vielzahl dieser Stöße über eine längere Zeit, so erkennt man, dass das Teilchen deutlich von seiner ursprünglichen Bahn abgelenkt wurde. Liegt nun ein inhomogenes Plasma vor, so wird ein Teilchen im Raumbereich mit niedrigerer Teilchendichte weniger oft abgelenkt werden als ein Teilchen im dichteren Raumbereich. Somit wird sich ein Gradient einstellen vom dichteren Bereich in den weniger dichten Bereich. Diesen Vorgang nennt man *Diffusion* (s. Abb. 2.4). Diffusion ist zunächst einmal ein zufälliger Vorgang. Liegen nun jedoch noch elektromagnetische Felder an, die auf die geladenen Teilchen eine Kraft wirken lassen, so muss dies berücksichtigt werden. Für die Bewegung der Teilchen im Plasma gilt im Gleichgewicht

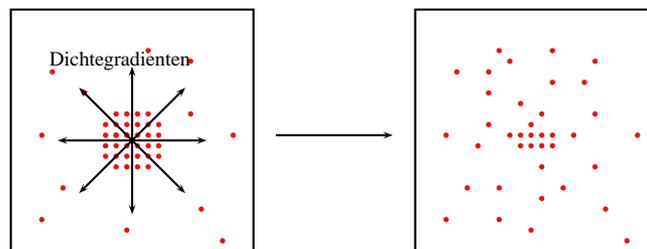


Abbildung 2.4: Schematischer Vorgang einer freien Diffusion in einem Plasma, d.h. ohne externe elektromagnetische Felder

die makroskopische Gleichgewichtsbewegungsgleichung [LL94] mit vernachlässigbarer Beschleunigung- bzw. Trägheitskraft der Teilchen:

$$qn \left(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} \right) - \nabla p - mn\nu_m \vec{u} = 0 \quad (2.29)$$

Dabei ist q die Ladung eines Teilchen, n die Teilchendichte, \vec{E} und \vec{B} das elektrische bzw. magnetische angelegte Feld, \vec{u} die Driftgeschwindigkeit der Teilchen, p der Druck im Plasma und ν_m die Impulsübertragungsfrequenz.

Betrachtet wird hier der Fall mit einem verschwindenden Magnetfeld $\vec{B} = \vec{0}$. Da sich durch die Induktionsspulen jedoch ein magnetisches Feld bildet, stellt dies eine sehr grobe, jedoch notwendige, Näherung dar, da sich sonst eine nicht einfach zu behandelnde partielle Differentialgleichung für die Teilchendichte ergibt. Geht man nun von einem isothermischen Plasma ($\nabla p = kT\nabla n$) aus, so erhält man für die Driftgeschwindigkeit der

Teilchen bzw. mit $\vec{\Gamma} = n \vec{u}$ den Fluss der Teilchen:

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma} &= \frac{nq\vec{E}}{m\nu_m} - \frac{kT}{m\nu_m} \nabla n \\ &= \pm \mu n \vec{E} - D \nabla n\end{aligned}\quad (2.30)$$

Dabei wurde die Mobilität $\mu = \frac{|q|}{m\nu_m}$ und die Diffusionskonstante $D = \frac{kT}{m\nu_m}$ eingeführt. Das positive Vorzeichen gilt für positive Ionen und das negative entsprechend für Elektronen. Damit die Gesamtladung überall im Plasma erhalten bleibt, muss der Fluss der Elektronen aus einem Gebiet immer gleich dem Fluss der Ionen aus diesem Gebiet sein ($\vec{\Gamma}_e = \vec{\Gamma}_i$) [LL94]. Dies gilt auch, wenn Ionisationsprozesse stattfinden, da gleich viele Ladungen beider Arten gebildet werden. Desweiteren geht man davon aus, dass gleich viele Elektronen wie Ionen vorliegen ($n_e = n_i = n$).

Elektronen sind jedoch viel leichter und besitzen somit weniger Trägheit als die schwereren Ionen. Daher wird sich am Anfang ein elektrisches Feld einstellen, welches dem Prozess entgegenwirkt. Dieses lässt sich aus den oben genannten Voraussetzungen ableiten:

$$\vec{\Gamma}_e = \vec{\Gamma}_i \quad (2.31)$$

$$\mu_i n \vec{E} - D_i \nabla n = -\mu_e n \vec{E} - D_e \nabla n \quad (2.32)$$

$$\rightarrow \vec{E} = \frac{D_i - D_e}{\mu_i + \mu_e} \frac{\nabla n}{n} \quad (2.33)$$

Dieses Ergebnis lässt sich jedoch wieder in eine der beiden „Fluss-Gleichungen“ (betrachtet wird hier die Ionen-Gleichung) einsetzen, sodass man erhält:

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma} &= -\frac{\mu_i D_e + \mu_e D_i}{\mu_i + \mu_e} \nabla n \\ &= -D_a \nabla n\end{aligned}\quad (2.34)$$

Dabei wurde die *ambipolare Diffusionskonstante* $D_a = \frac{\mu_i D_e + \mu_e D_i}{\mu_i + \mu_e}$ eingeführt. Dieses Gesetz nennt man auch das *Fick'sche Gesetz*, jedoch mit der ambipolaren Diffusionskonstante. Den so erhaltenen Teilchenfluss kann man nun in die Kontinuitätsgleichung [LL94] einsetzen, sodass man erhält:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\Gamma} = G - L \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} - D_a \nabla^2 n = G - L \quad (2.36)$$

Dabei ist man sowohl von einer konstanten Mobilität als auch einer konstanten Diffusionskonstante ausgegangen. G bzw. L ist die Teilchengewinnungs- bzw. Teilchenvernichtungsrate. Geht man nun davon aus, dass Elektronen (bzw. auch Ionen) nur durch Ionisationsstöße gewonnen werden und jeder dieser Stöße auch genau ein Elektron aus dem neutralen Gasatom herausschlägt, so kann man $G = \nu_{iz}n$ setzen, wobei ν_{iz} die Ionisationsfrequenz ist. Gleichzeitig geht man von keiner Rekombination bzw. sonstigen Verlusten an Teilchen aus, sodass $L = 0$ gilt. Betrachtet wird weiterhin der Gleichgewichtszustand, also eine zeitlich konstante Elektronendichte $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$. Dies zusammengefasst führt zur homogenen Diffusionsgleichung für Elektronen bzw. Ionen:

$$\boxed{\nabla^2 n + \frac{\nu_{iz}}{D_a} n = 0} \quad (2.37)$$

Zusammen mit gegebenen Randbedingungen lässt sich die homogene Diffusionsgleichung entsprechend der vorliegenden Geometrie lösen.

2.5 Bessel'sche Differentialgleichung und ihre Lösung

$$x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x \frac{\partial y}{\partial x} + (x^2 - \nu^2) y = 0 \quad (2.38)$$

Die Bessel'sche Differentialgleichung (Gl. 2.38), benannt nach Friedrich Wilhelm Bessel, ist eine in der Physik und in anderen Naturwissenschaften häufig vorkommende lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. In der Physik tritt sie häufig in Zusammenhang mit zylindrischen Randwertproblemen wie z.B. bei Lösung der Laplace-Gleichung in Zylinderkoordinaten [Jac99] auf. Aber auch Probleme mit sphärischen Randbedingungen, wie z.B. Schwingungen einer kreisförmigen Membran [Gre03] oder die hier vorliegende Diffusion von Elektronen in einem sphärischen Entladungsgefäß, lassen sich durch die Bessel-Differentialgleichung beschreiben.

Lösen lässt sich die Bessel'sche Differentialgleichung durch einen Potenzreihenansatz [BD05]. In dem vorliegenden Fall ist besonders der Fall für ein halbzahliges $\nu = \frac{1}{2}$ interessant:

$$x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x \frac{\partial y}{\partial x} + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0 \quad (2.39)$$

Dabei gibt die Konstante ν die Ordnung der Differentialgleichung an. Macht man nun einen Potenzreihenansatz nach [BD05] $y = a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{r+n}$ und setzt dies ein, ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \left(r^2 - \frac{1}{4}\right) a_0 x^r + \left[(r+1)^2 - \frac{1}{4}\right] a_1 x^{r+1} \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\left[(r+n)^2 - \frac{1}{4}\right] a_n + a_{n-2}\right) x^{r+n} = 0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

Damit die Gleichung erfüllt ist, müssen alle Summanden einzeln verschwinden. Da die a_n zunächst beliebig sind, kann man $a_0 = 1$ wählen. Deshalb müssen jedoch $r^2 - \frac{1}{4} = 0$ bzw. $r_1 = +\frac{1}{2}$ und $r_2 = -\frac{1}{2}$ gelten, damit der erste Summand verschwindet. Betrachtet man zunächst nur den Fall $r_1 = +\frac{1}{2}$ führt diese Bedingung dazu, dass $a_1 = 0$ sein muss, damit auch der zweite Summand verschwindet. Betrachtet man nun das Verschwinden des Summenterms, so erhält man die Rekursionsformel für die a_n

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+1)} \quad (2.41)$$

bzw. mit $n = 2m$ und $m = 1, 2, 3, \dots$

$$a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{2m(2m+1)} \quad (2.42)$$

Die a_n mit ungeradem Index verschwinden nach oben erhaltener Bedingung. Diese Rekursionsformel lässt sich durch $a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{(2m+1)!}$ [BD05] darstellen. Führt man diese Ergebnisse zusammen, so erhält man für die erste Lösung der Differentialgleichung:

$$y_1(x) = x^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} \quad (2.43)$$

Dies ist jedoch genau die Reihendarstellung von $\sin(x)$. Definiert man nun $J_{1/2} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} y_1$, so erhält man:

$$J_{1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \sin(x) \quad (2.44)$$

Diese Gleichung wird als Bessel-Funktion 1. Art der Ordnung $\nu = \frac{1}{2}$ bezeichnet.

Betrachtet man nun den Fall für $r_2 = -\frac{1}{2}$, ergibt sich ein Unterschied in der Berechnung von a_1 . Da nun $(r+1)^2 - 1/4 = 0$ gilt, ist die Wahl von sowohl a_0 als auch a_1 beliebig. Damit sind die ungeraden Koeffizienten nicht zwingend null. Es lassen sich mit ähnlichen Überlegungen wie oben folgende Rekursionsformeln berechnen [BD05]:

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!} \quad (2.45)$$

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n a_1}{(2n+1)!} \quad (2.46)$$

Mit den Reihendarstellungen für $\sin(x)$ bzw. $\cos(x)$ ergibt sich für y_2 :

$$y_2(x) = a_0 \frac{\cos(x)}{x^{1/2}} + a_1 \frac{\sin(x)}{x^{1/2}} \quad (2.47)$$

Für die zweite nötige unabhängige Lösung der Differentialgleichung wählt man für gewöhnlich $a_0 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}$ und $a_1 = 0$, sodass

$$J_{-1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos(x) \quad (2.48)$$

gilt. Für ganzzahlige Ordnungen der Bessel'schen Differentialgleichung ist es üblich

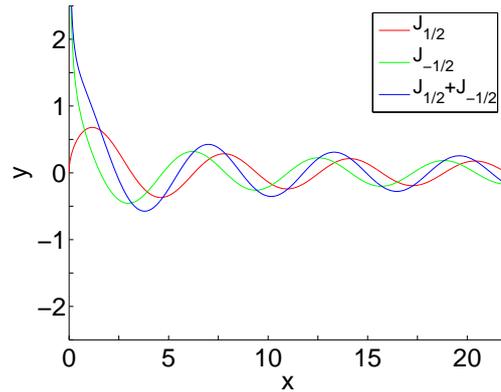


Abbildung 2.5: Qualitativer Verlauf der Lösung der Bessel'schen Differentialgleichung der Ordnung $\nu = \frac{1}{2}$

die zweite Lösung als Neumann-Funktion $N_\nu(x)$ bzw. Bessel-Funktion zweiter Art zu definieren. Für die Ordnung $\nu = \frac{1}{2}$ ergibt sich $N_{1/2}(x) = -J_{-1/2}(x)$.

Die allgemeine Lösung der Bessel'schen Differentialgleichung der Ordnung $\nu = \frac{1}{2}$ ergibt sich nun als Superposition der einzelnen Lösungen mit den durch die Randbedingungen zu bestimmenden Konstanten A und B :

$$\begin{aligned} y &= A J_{1/2}(x) - B N_{1/2}(x) \\ &= A \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \sin(x) - B \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos(x) \end{aligned} \quad (2.49)$$

Für Probleme, die einer sphärischen Geometrie zugrundeliegen, ist es sinnvoll, *sphärische Bessel- bzw. Neumann-Funktionen* zu definieren:

$$j_0(x) = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} J_{1/2}(x) \quad (2.50)$$

$$n_0(x) = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} N_{1/2}(x) \quad (2.51)$$

Somit ergibt sich für die Lösung der Bessel-Differentialgleichung:

$$y = A \left(\frac{2x}{\pi}\right)^{1/2} j_0(x) - B \left(\frac{2x}{\pi}\right)^{1/2} n_0(x) \quad (2.52)$$

Der qualitative Verlauf der Lösung der Bessel'schen Differentialgleichung der Ordnung $\nu = \frac{1}{2}$ ist in Abb. 2.5 dargestellt.

Entsprechend dem vorhergehenden Vorgehen lässt sich die Bessel'sche Differentialglei-

chung auch für ganzzahlige Ordnungen lösen. Allerdings sind dort die beiden Lösungen $J_\nu(x)$ und $J_{-\nu}(x)$ nicht linear unabhängig voneinander. Somit muss noch eine zweite Lösung gesucht werden, die durch die Neumann-Funktionen $N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}$ gefunden wird. Daraus folgt auch, dass wie oben schon erwähnt für $\nu = \frac{1}{2}$ $N_{1/2}(x) = -J_{-1/2}(x)$ gilt. Somit ergibt sich für die allgemeine Lösung der Bessel'schen Differentialgleichung der Ordnung ν :

$$\boxed{y = A J_\nu(x) - B N_\nu(x)} \quad (2.53)$$

3 Experimenteller Aufbau

In diesem Kapitel soll der für die experimentellen Messungen benutzte Aufbau vorgestellt werden. Kapitel 3.1 stellt dabei den Aufbau des eigentlichen Entladungsgefäßes dar und beschreibt die Bereitstellung der für die Zündung des Plasmas notwendigen elektrischen Energie.

Das Kapitel 3.2 soll erläutern, welcher Diagnostikaufbau verwendet wurde, um die Messungen der H_{β} -Linie bzw. des gesamten Linienspektrums des Plasmas durchzuführen.

3.1 Entladungsgefäß

Für die Messungen der integrierten Elektronendichten wurde das Plasma-Experiment „Prometheus“ genutzt [TJ08]. Es handelt sich dabei um ein gepulstes induktiv gekoppeltes LF-Plasma, das in einem kugelförmigen Pyrex-Glasgefäß gezündet wird, sodass sich ein sphärisches Entladungsplasma bilden kann. Der Glaskolben hat einen Außendurchmesser von $d = 200$ mm. Die Wahl des Materials lässt das Glasgefäß undurchdringbar für hochenergetische VUV-Strahlung im Wellenlängenbereich von unter 350 nm werden, sodass die Strahlenbelastung verringert wird. Die Wahl eines sphärischen Entladungsgefäßes hat den Vorteil eines möglichst großen Plasmavolumens bei verhältnismäßig kleiner Oberfläche. Desweiteren ist so, eine effizientere Leistungseinkopplung in das Plasma zu erreichen als z.B. in einem zylinderförmigen Glasgefäß. Für die Anbringung des Druckmessgerätes bzw. zur Befüllung des Glaskolbens mit dem Entladungsgas, besitzt der Glaskolben oben und unten jeweils eine Öffnung, die mit einem CF45-Flansch versehen ist. An die untere Öffnung ist ein Haarnadelventil montiert, mit dem sich der benötigte Gasdruck innerhalb des Gefäßes justieren lässt. Den nötigen Unterdruck liefert eine Turbomolekularpumpe, die einen Druckbereich von bis zu 10^{-8} mbar herstellen kann. Der Druck wird mit einem Breitband-Manometer beobachtet. Dies ist notwendig, da der Gasdruck im Rezipienten für

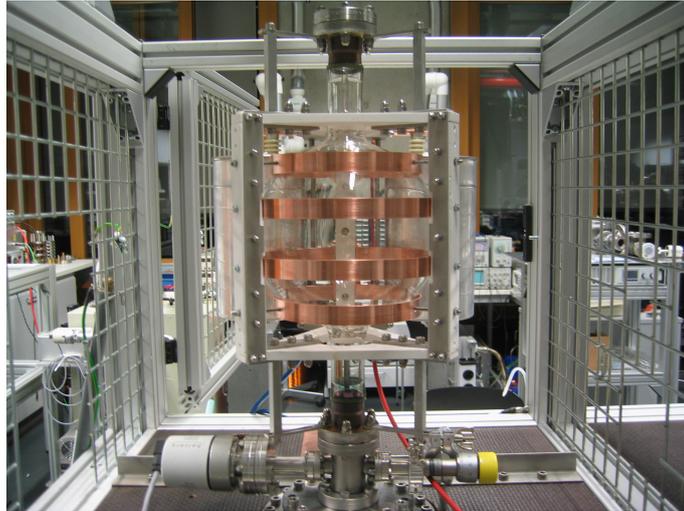


Abbildung 3.1: Vorderansicht des experimentellen Aufbaus

die Messung konstant sein soll, um eine möglichst genaue Elektronendichtemessung zu erhalten.

Als Gas für die Entladung wird ein Gemisch aus 98% Argon und 2% Wasserstoff benutzt. Wasserstoff wird verwendet, da sich mittels der Stark-Verbreiterung der H_{β} -Linie unter anderem die Elektronendichte bestimmen lässt. Die Verwendung von zusätzlich 2% Argon liegt in der niedrigen Zündspannung des Edelgases begründet. Diese Gasmischung findet in der Industrie unter anderem Anwendung als Schweißgas.

Für die Herstellung der niederfrequenten elektrischen Leistung, die das Plasma anregen soll, wird ein Serienresonanzkreis (Abb. 3.2), bestehend aus Induktivität, Kapazität und parasitärem ohmschen Widerstand benutzt, der in dem hier beschriebenen Fall, mit einer Gleichspannung von bis zu 5 kV betrieben wird.

Der Schwingkreis verwendet als Induktionsspule vier Spulensegmente aus Kupferband mit einem Querschnitt von 20×2 mm. Aus den Materialeigenschaften folgt eine Induktivität von $L_0 = 2 \mu\text{H}$. Die Metallbleche werden möglichst eng, kreisförmig um den Rezipienten befestigt, um eine möglichst gute Leistungseinkopplung in das Plasma zu erhalten. Im vorliegenden Experiment ist dies erstaunlich gut gelungen, sodass eine Kopplungseffizienz von 80% erreicht wurde [TJ08].

Die für den Resonanzkreis notwendige Kapazität wird von zwei Kondensatoren mit jeweils $C = 6 \mu\text{F}$ bereitgestellt, die parallel geschaltet sind. Somit ergibt sich eine Gesamtkapazität von $C_0 = 12 \mu\text{F}$. Die maximal erlaubte Ladespannung der Kondensatoren beträgt $U \approx 5 \text{ kV}$, sodass sich eine maximal gespeicherte Energie von $W_{\text{el}} = 150 \text{ J}$ ergibt. Bei den hier vorliegenden Messungen wurden die Kondensatoren mit einer Spannung im Bereich

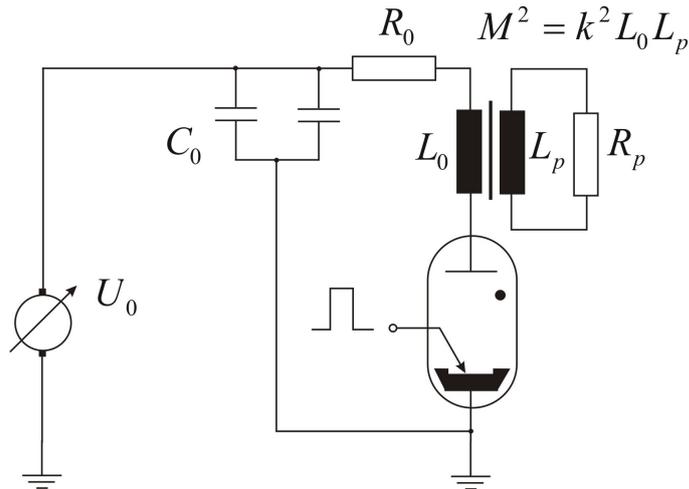


Abbildung 3.2: Schaltbild der elektrischen Komponenten

zwischen $U_{\min} = 2,25 \text{ kV}$ bis $U_{\max} = 5 \text{ kV}$ geladen. Somit ergibt sich eine elektrische Energie von $W_{\text{el},\min} = 30,38 \text{ J}$ bis $W_{\text{el},\max} = 150 \text{ J}$, die in den Kondensatoren gespeichert wird. Mittels der Schwingkreistheorie ergibt sich für die Eigenkreisfrequenz des Schwingkreises:

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} \approx 30 \text{ kHz} \quad (3.1)$$

Aufgrund des ohmschen Widerstands der Schaltung wird der Schwingkreis unterkritisch gedämpft. Dies ermöglicht auch eine für die Zündung des Plasmas nötige hohe Stromanstiegsrate von bis zu $\approx 1.8 \text{ kA}/\mu\text{s}$. Diese Stromanstiegsrate ist jedoch unmittelbar nach dem Einschalten maximal, was für die aktiven Bauelemente eine massive Belastung darstellt. Daher wird für die Schaltung des Schwingkreises ein Ignitron verwendet.

Ein Ignitron ist ein Schalter, der für hohe Spannungen geeignet ist. Es besteht aus einem Quecksilberbad, in das ein spitzer Halbleiterstift eingelassen ist. Bekommt der Halbleiterstift nun einen ausreichend großen positiven Stromimpuls, so bildet sich im Quecksilberbad ein Kathodenspot, aus dem Elektronen austreten. In diesem Experiment wird dieser positive Stromimpuls über einen getriggerten Taster gegeben. Die emittierten Elektronen können nun aufgrund des entstandenen Quecksilberdampfes eine Bogenentladung zwischen Quecksilberbad und gegenüberliegender Anode zünden. Das Ignitron ist nun solange im leitenden Zustand, bis eine gewisse Mindestspannung unterschritten wird. Vorteile dieses Schalters sind die relativ lange Lebensdauer aufgrund der verlustlosen Regenerierung des Quecksilbers nach dem Ausschalten. Nachteile des Ignitrons sind unter anderem der hohe Anteil von flüssigem Quecksilber, was in Europa nicht mehr erlaubt ist. Deshalb

werden Ignitrons nach und nach durch Halbleiterschalter, wie z. B. Thyristoren, ersetzt [TJSW09].

Die Pulsdauer für eine Plasmaentladung beträgt $\tau = 120 \mu\text{s}$. Somit ergibt sich eine theoretische mittlere Leistung von $P \approx 1 \text{ MW}$, die in das Plasma deponiert werden kann.

3.2 Diagnostik

Um die Elektronendichte bestimmen zu können wird eine spektroskopische Diagnostik verwendet. Dazu wird die Stark-Verbreiterung der H_{β} -Linie ($\lambda_{H_{\beta}} \approx 486 \text{ nm}$) untersucht. Diese ist ein Maß für die Elektronendichte im Plasma [Gri64]. Aufgrund der experimentellen Voraussetzungen lässt sich die Elektronendichte jedoch nur zeitlich bzw. räumlich integriert messen. Für die Messung der Emissionsspektren des Plasmas wird ein Gitter-Monochromator benutzt, an das eine CCD-Kamera angeschlossen ist. Ein Monochromator

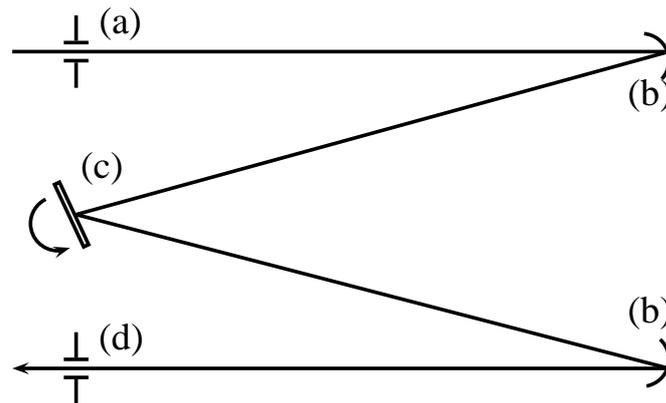


Abbildung 3.3: Optischer Aufbau eines Gittermonochromators: (a) Eingangsspalt, (b) Hohlspiegel, (c) Reflexionsgitter und (d) Ausgangsspalt

dient dazu, einzelne Wellenlängen aus einem breiten Spektrum von Wellenlängen herauszufiltern. Der optische Aufbau des Monochromators ist in Abb. 3.3 dargestellt. Grundlegend besteht er aus einem Eintrittsspalt, einem optischen Element wie z.B. einem Spiegel oder einer Linse, einem dispersierenden Element, wie z.B. einem Gitter oder einem Prisma, wiederum einem optischen Element und abschließend aus einem Austrittsspalt bzw. in diesem Fall aus einer Kamera [Pet]. Das vom Plasma emittierte Licht wird über einen Lichtwellenleiter in den Monochromator geführt. Dabei ist auf eine möglichst verlustarme Kopplung des Leiters an das Glasgefäß zu achten. Das Licht wird nun, nachdem es den Eintrittsspalt passiert hat, durch den anschließenden Spiegel parallelisiert. Dies ist wichtig, damit durch das Gitter eine räumliche Trennung der Spektrallinien in der Ebene des Ausgangsspalts bzw. der Kamera erreicht werden kann. Die parallelen Strahlen werden nun durch das Gitter in einzelne Wellenlängen zerlegt, die jeweils unter einem anderem Austrittswinkel erscheinen. Diese Spektrallinien werden anschließend mithilfe der CCD-Kamera aufgenommen. Die Kamera selbst wird mithilfe einer Photodiode und eines Phototriggers gesteuert, sodass nur im Moment der Entladung ein Intensitätsbild aufgenommen wird. Ein exemplarisches empfangenes Signal der Photodiode während

einer Entladung ist in Abb. 4.1 dargestellt. Durch das Drehen des Gitters lässt sich nun eine Intensitätsverteilung in Abhängigkeit von der jeweiligen Wellenlänge bestimmen. CCD steht für „charged coupled devices“ und bezieht sich auf die Arbeitsweise von den in der Kamera eingebauten Sensoren [Göh02]. Diese Sensoren sind Halbleiterbauelemente aus Silizium, die aus vielen einzelnen Photodioden bestehen, die in Form einer Matrix oder einer Zeile angeordnet sind. Durch die p-Dotierung des Halbleitermaterials bekommt der Sensor viele positive Elektronenlöcher. Mithilfe des inneren photoelektrischen Effekts lässt sich nun die Energie der eingestrahnten Photonen in elektrische Ladungen überführen. Die so entstandenen Elektronen werden durch die angelegte Spannung zunächst in einem Potentialtopf gesammelt. Diese gefüllten Potentialtöpfe werden nun von Photodiode zu Photodiode durchgereicht, bis sie an einer Ecke des CCDs in einen Verstärker gelangen und somit ein elektrisches Signal entsteht. Die Art des Durchreichens gibt dem CCD seinen Namen. Dabei werden zunächst die Photodioden einer Zeile ausgelesen, bevor die nächste Zeile begonnen wird. Somit lässt sich nur das Gesamtbild darstellen und nicht nur ein Element der Matrix oder der Zeile. Die Aufnahme der von der Kamera empfangenen Signale übernimmt ein LabView-Programm. Um die gewonnenen Daten zu quantifizieren und eine Aussage über die Verbeitung der H_{β} -Linie zu treffen, wird das Programm Origin benutzt. Eine so gewonnene spektrale Intensitätsverteilung ist in Abb. 3.4 dargestellt. In dieser wird nur der für die Messung interessante Wellenlängenbereich von 485,4 nm-486,6 nm betrachtet. Mithilfe eines „Lorentz-Fits“ wird die Breite der H_{β} -Linie berechnet. Diese Linienbreite wird nun mit den Werten in der Literatur [Gri64] verglichen, um Werte für die gemittelte Elektronendichte zu erhalten.

Im vorliegenden Aufbau wird ein Monochromator der Firma „Princeton Instruments“ verwendet [Pria], der einen Scanbereich von 0-1400 nm besitzt. Die Gitterkonstante des eingebauten Reflexionsgitters beträgt $2400 \text{ }^1/\text{mm}$. Die fokale Länge des Monochromators beträgt $l = 500 \text{ mm}$. Die bei der Messung eingestellte Spaltbreite beträgt $b = 50 \text{ }\mu\text{m}$. Laut Hersteller ergibt sich somit eine maximale Auflösung von ca. $\Delta s = 0.45 \text{ \AA}$.

Die verwendete CCD-Kamera ist ebenfalls von „Princeton Instruments“ [Prib]. Sie verwendet einen CCD-Sensor, der aus 1024×256 Photodioden mit einer Größe von jeweils $26 \times 26 \text{ }\mu\text{m}$ besteht.

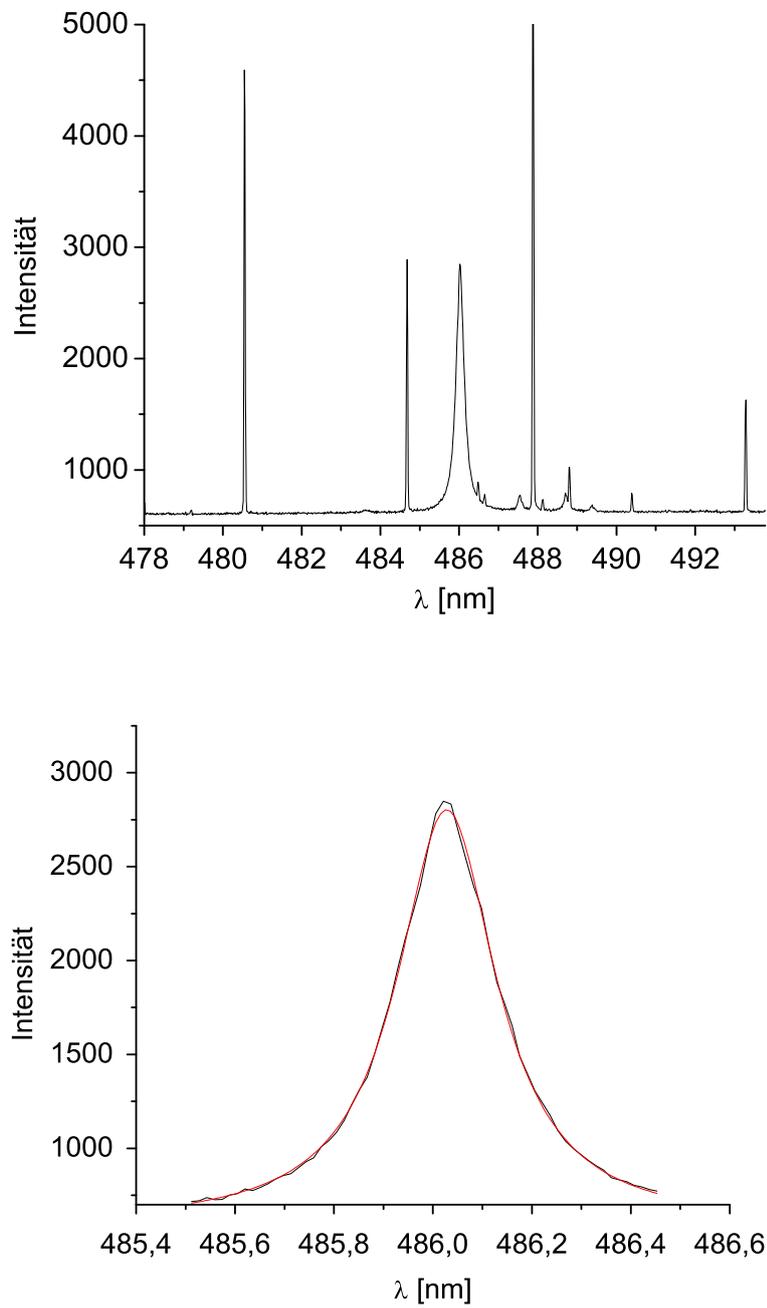


Abbildung 3.4: Spektrale Intensitätsverteilung bei $U = 4,75$ kV und $p = 25$ Pa des
(a) gesamten Spektrums bzw. (b) der H β -Linie mit Lorentz-Fit

4 Räumliche und zeitliche Elektronendichteverteilung

In diesem Kapitel wird ein Modell für die zeitlich und räumlich aufgelöste Elektronendichteverteilung in einem induktiv gekoppelten Entladungsplasma erstellt. Dazu wird in Kapitel 4.1 mithilfe der ambipolaren homogenen Diffusionsgleichung die radiale Abhängigkeit der Elektronendichte ermittelt.

In Kapitel 4.2 wird die Proportionalität zwischen elektrischer Leistung im Plasma und der Elektronendichte genutzt, um den zeitlichen Verlauf der Elektronendichte zu modellieren. Anschließend wird in Kapitel 4.3 das erstellte Modell auf gemessene Elektronendichten des Experiments „Prometheus“ angewendet.

4.1 Ortsauflösung

In Kapitel 2.4 wurde die homogene Diffusionsgleichung (Gl. 2.37) hergeleitet. Diese beschreibt den räumlichen Charakter der Elektronendichte. Sie ist eine homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung. Die Aufgabe besteht nun darin, die Diffusionsgleichung unter gewissen Voraussetzungen zu lösen. Vergleicht man die Diffusionsgleichung mit der Helmholtz-Differentialgleichung für die Fourier-analytierte kugelsymmetrische Wellengleichung in [Jac99], so kann man die homogene Diffusionsgleichung durch $k^2 = \frac{\nu_{iz}}{D}$ auf die Helmholtz-Differentialgleichung zurückführen. Ein möglicher Lösungsweg ist in [Jac99] dargestellt. An diesem wird sich im Folgenden orientiert.

Aufgrund der vorliegenden kugelsymmetrischen Geometrie wird ein sphärisches Koordinatensystem verwendet. In sphärischen Koordinaten besitzt der Laplace-Operator $\nabla^2\Phi$ folgende Form:

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Phi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \quad (4.1)$$

Beschränkt man sich nun in erster Näherung auf einen axial- und polarsymmetrischen Elektronendichteverlauf, also $n_e = n_e(r)$, so folgt:

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (rn_e) + k^2 n_e = 0 \quad (4.2)$$

Durch Ersetzen mit $n_e(r) = \frac{\tilde{n}_e(r)}{\sqrt{r}}$ bzw. $x = kr$ folgt:

$$\frac{d^2 \tilde{n}_e}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\tilde{n}_e}{dx} + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right) \tilde{n}_e = 0 \quad (4.3)$$

Ein Vergleich mit Gl. 2.38 in Kap. 2.5 zeigt, dass dies genau die Bessel'sche Differentialgleichung mit $\nu = \frac{1}{2}$ ist. Somit ergeben sich folgende Lösungen für \tilde{n}_e

$$\tilde{n}_e(x) = A J_{1/2}(x) - B N_{1/2}(x) \quad (4.4)$$

bzw. nach Resubstitution mit $n_e = \frac{\tilde{n}_e}{\sqrt{r}}$ bzw. $x = kr$:

$$n_e(r) = A \frac{J_{1/2}(kr)}{\sqrt{r}} - B \frac{N_{1/2}(kr)}{\sqrt{r}} \quad (4.5)$$

Dabei ist $J_{1/2}$ die Bessel-Funktion erster Art und $N_{1/2}$ die Bessel-Funktion zweiter Art bzw. die Neumann-Funktion. Setzt man nun die Bessel-Funktionen erster bzw. zweiter Art aus Kap. 2.5 ein, so ergibt sich für die radiale Elektronendichte:

$$n_e(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \left(A \frac{\sin(kr)}{r} - B \frac{\cos(kr)}{r} \right) \quad (4.6)$$

Die Konstanten A und B lassen sich nun über Einarbeitung der Randbedingungen bestimmen. Man trifft nun die Annahme, dass die Elektronendichte im Zentrum des Plasmas maximal ist. Somit muss also gelten $n_e(r \rightarrow 0) = n_{e,0}$. Damit dies zu keiner Singularität führt, muss $B = 0$ sein, und somit der zweite Term verschwinden. Desweiteren lässt sich aus $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right) = 1$ folgern, dass $\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(kr)}{r} \right) = k$ gilt. Damit ergibt sich also

$$A = \sqrt{\frac{\pi}{2k}} n_{e,0} \quad (4.7)$$

bzw.

$$n_e(r) = n_{e,0} \frac{\sin(kr)}{kr} \quad (4.8)$$

Die zweite Randbedingung liefert eine verschwindende Elektronendichte am Glasgefäß. Dies ist eine nicht triviale Forderung, da dies eine unendlich große Geschwindigkeit der Elektronen am Rand voraussetzt [LL94]. Somit muss also $n_e(r_0) = 0$ gelten und damit:

$$\sin(kr_0) = 0 \quad (4.9)$$

Um diese Gleichung zu erfüllen, muss $kr_0 = Z\pi$ mit $Z \in \mathbb{Z}$ gelten. Da keine Elektronen aus dem Glasgefäß austreten können, muss $Z = 1$ erfüllt sein, sodass $k = \frac{\pi}{r_0}$ gelten muss. Somit ergibt sich also insgesamt für die zeitlich konstante Elektronendichteverteilung:

$$n_e(r) = n_{e,0} r_0 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{r_0} r\right)}{\pi r} \quad (4.10)$$

Integriert man nun Gl. 4.10 über das Entladungsgefäß, so erhält man die räumlich gemittelte Elektronendichte (ausführlichere Rechnung s. Anhang A.1):

$$\langle n_e \rangle_{\text{räumlich}} = \frac{1}{V} \int_V n_e(r) dV = \frac{3n_{e,0}}{\pi^2} \quad (4.11)$$

4.2 Zeitauflösung

Da es sich um eine gepulste Plasmaentladung handelt, die durch einen Resonanzkreis angeregt wird, ist die elektrische Leistung im Resonanzkreis nicht unmittelbar nach dem Einschalten maximal. Viel mehr hat die elektrische Wechselstromleistung einen sinusförmigen zeitlichen Verlauf, dem aufgrund der Dämpfung durch das Plasma, noch eine abfallende Exponentialfunktion überlagert ist. Um einen qualitativen Verlauf der Leistung im Plasma zu erhalten, betrachtet man das elektrische Signal der Photodiode, das die Intensität des emittierten Lichts darstellt. Ein solcher Verlauf ist in Abb. 4.1 dargestellt. Die elektrische Leistung ist proportional zur Lichtintensität. Somit lässt sich aus der gemessenen Intensitätsverteilung der zeitliche Verlauf der elektrischen Leistung bestimmen. Dazu werden die gemessenen Daten gefittet. Dabei wurde davon ausgegangen, dass die Leistung aus einem Wirk-, einem Blind- und einem „Afterglow“-Anteil besteht, denen eine exponentielle Dämpfung überlagert ist. Als „Afterglow-Effekt“ bezeichnet man die Tatsache, dass das Plasma selbst nach Ausschalten des elektrischen Stroms eine gewisse Zeit nachbrennt. Somit erhält man folgenden zeitlichen Leistungsverlauf:

$$\begin{aligned} \dot{W}(t) &= A't^2e^{-Bt} \left(\underbrace{C_1 \cos^2(\omega t)}_{\text{Wirkleistung}} + \underbrace{C_3 \sin(\omega t) \cos(\omega t)}_{\text{Blindleistung}} + \underbrace{C_2}_{\text{„Afterglow“}} \right) \\ &\approx A't^2e^{-Bt} (C_1 \cos^2(\omega t) + C_2) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Dabei sind A' , B und die C_i Fit-Konstanten. Der Vergleich mit den Messdaten ergibt, dass $C_2 \approx 2C_1 = C$ ist. Desweiteren lässt sich der Blindleistungsanteil aufgrund der hohen Anregungsfrequenz von $f \approx 30$ kHz vernachlässigen ($\sin(\omega t) \cos(\omega t) \approx 0$):

$$\dot{W}(t) = A'Ct^2e^{-Bt} (\cos^2(\omega t) + 2) \quad (4.13)$$

Die Elektronendichte im Plasma ist nun für den betrachteten Dichtebereich proportional zur Leistung, die im Plasma deponiert wird [LL94]. Da die sowohl räumlich als auch zeitlich gemittelte Elektronendichte gesucht wird, muss nun noch die gemittelte räumliche Elektronendichte (Gl. 4.11) berücksichtigt werden, sodass sich ergibt:

$$n_e(t) \sim \langle n_e \rangle_{\text{räumlich}} \dot{W}(t) \quad (4.14)$$

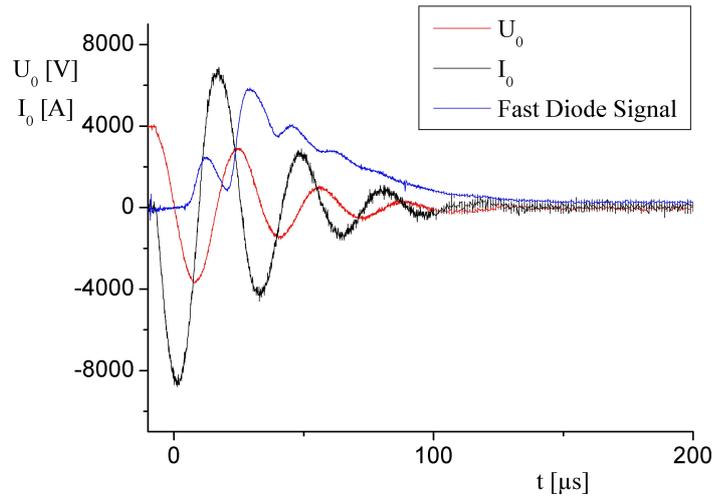


Abbildung 4.1: Diodensignal im Vergleich zur Spannung und Stromstärke des Resonanzkreises

Damit ergibt sich also für die zeitliche Elektronendichte, wenn A' mit der Proportionalitätskonstante zu A zusammengefasst wird:

$$n_e(t) = \frac{3n_{e,0}}{\pi^2} ACt^2 e^{-Bt} (\cos^2(\omega t) + 2) \quad (4.15)$$

Da A eine einfache Proportionalitätskonstante ist, wird sie auf $A = 1$ festgesetzt. Um nun mithilfe der gemessenen gemittelten Elektronendichte die Konstanten in der Elektronendichte zu erhalten, wird über die zeitliche Elektronendichte gemittelt:

$$\begin{aligned} \langle n_e(r, t) \rangle &= \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} n_e(t) dt \\ &= \frac{3n_{e,0}}{\pi^2} C \left(\int_{\Delta t} t^2 e^{-Bt} \cos^2(\omega t) dt + 2 \int_T t^2 e^{-Bt} dt \right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Dabei ist Δt die Pulsdauer der Entladung. Da nun die Elektronendichte nach der Entladungsdauer Δt nahezu verschwindet, können die Obergrenzen der Integrale ins Unendliche verschoben werden. Die Integrale lassen sich nun mithilfe von partiellen Integrationen berechnen, näheres siehe Anhang A.2. Mit diesen Berechnungen ergibt sich für die Konstante K :

$$K = n_{e,0} C = \frac{1}{15} B^3 \langle n_e \rangle \pi^2 \quad (4.17)$$

Dabei ist B wie oben beschrieben eine Fit-Konstante, die für die Dämpfung des zeitlichen Verlaufs der Elektronendichte verantwortlich ist. Eine abfallende Exponentialfunktion fällt nach der fünf-fachen Relaxationszeit $\tau = \frac{1}{B}$ auf unter 1% des Ausgangswertes ab. Somit kann man näherungsweise die fünffache Relaxationszeit mit der Pulsdauer $\Delta t \approx 120 \mu\text{s}$ gleichsetzen, sodass sich für die Abklingkonstante $B \approx \frac{1}{24} 1/\mu\text{s}$ ergibt. Setzt man nun Gl. 4.17 in Gl. 4.15 ein, so erhält man den zeitlichen Verlauf der Elektronendichte:

$$\boxed{n_e(t) = \frac{1}{5} B^3 \Delta t \langle n_e \rangle t^2 e^{-Bt} (\cos^2(\omega t) + 2)} \quad (4.18)$$

Geht man nun von der Linearität in der Orts- bzw. Zeitabhängigkeit der Lösung aus, so kann man den räumlichen (Gl. 4.10) bzw. den zeitlichen (Gl. 4.18) Elektronendichteverlauf durch Multiplikation zur örtlich- und zeitlich aufgelösten Elektronendichte in Abhängigkeit von der gemessenen gemittelten Elektronendichte zusammenfügen:

$$n_e(r, t) = \frac{n_{e,0} r_0}{\pi} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{r_0} r\right)}{r} C t^2 e^{-Bt} (\cos^2(\omega t) + 2) \quad (4.19)$$

$$\boxed{n_e(r, t) = \frac{1}{15} B^3 \Delta t \langle n_e \rangle \pi r_0 t^2 e^{-Bt} (\cos^2(\omega t) + 2) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{r_0} r\right)}{r}} \quad (4.20)$$

4.3 Anwendung des Modells auf ein induktiv gekoppeltes Plasma

Mithilfe von Gl. 4.20 lässt sich sowohl der räumliche radiale als auch der zeitliche Verlauf der Elektronendichte berechnen. Die gemittelten Elektronendichtewerte wurden über die Diagnostik aus Kapitel 3 bestimmt. Abb. 4.2 zeigt die gemessenen gemittelten Werte in Abhängigkeit von der Kondensatorspannung U und dem Gasdruck p im Glaskolben. Aus die-

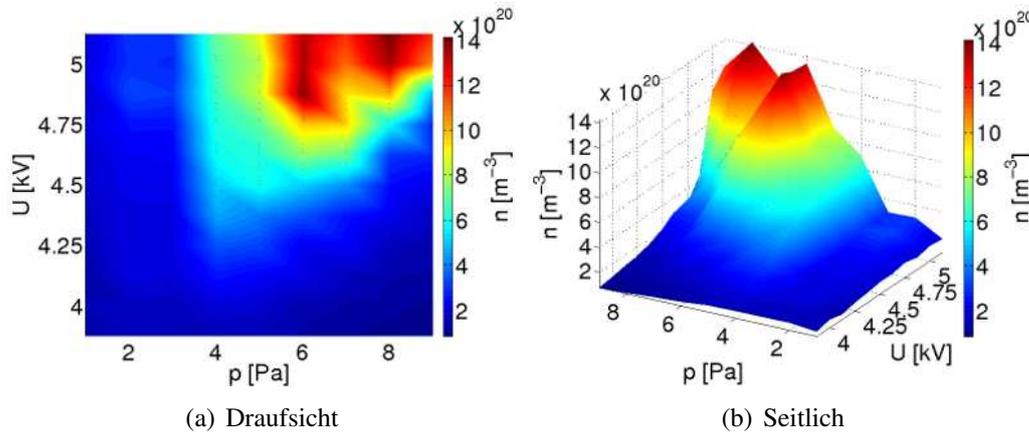


Abbildung 4.2: Gemessene integrierte Elektronendichten

sen Werten ergibt sich eine maximale gemittelte Elektronendichte von $n_e \approx 1,42 \cdot 10^{21} \text{ 1/m}^3$ bei $U = 5 \text{ kV}$ und $p = 25 \text{ Pa}$. Weiterhin ist klar erkennbar, dass die Elektronendichte proportional zur Kondensatorspannung und somit proportional zur elektrischen Leistung im Plasma ist. Desweiteren lässt sich ein Elektronendichtemaximum bei ca. $p = 16 - 20 \text{ Pa}$ feststellen. Dies ist in Übereinstimmung mit vorhergehenden Messungen [TJ08], bei denen ein maximaler Kopplungsfaktor zwischen $p_1 = 10 \text{ Pa}$ und $p_2 = 20 \text{ Pa}$ gemessen wurde. Die gemessenen Werte lassen sich nun mithilfe der Gl. 4.20 analysieren. Die Abbildungen 4.3(a)-4.3(f) zeigen den somit berechneten zeitlichen Verlauf für eine Spannung von $U = 5 \text{ kV}$ und $p = 18 \text{ Pa}$. Dabei wurde wie in Kap. 4 $\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(\frac{\pi}{r_0} r)}{r} \right) = \frac{\pi}{r_0}$ genähert. In den Abbildungen erkennt man, dass die Randbedingungen $n_e(r_0) = 0$ und $n_e(0) = n_{e,0}$, wie gefordert, erfüllt sind. Zwischen diesen beiden Werten nimmt die maximale Elektronendichte mit größer werdendem radialen Abstand ab. Auch dies erscheint sinnvoll, da aus den Randbedingungen eine maximale Elektronendichte in der Mitte des Entladungsgefäßes gefordert wurde. Der Verlauf der Elektronendichte ähnelt dem Diodensignal. Dies lässt sich auf die geforderte Abhängigkeit der Elektronendichte von der elektrischen Leistung im Plasma zurückführen. Die berechnete maximale erreichte Elektronendichte

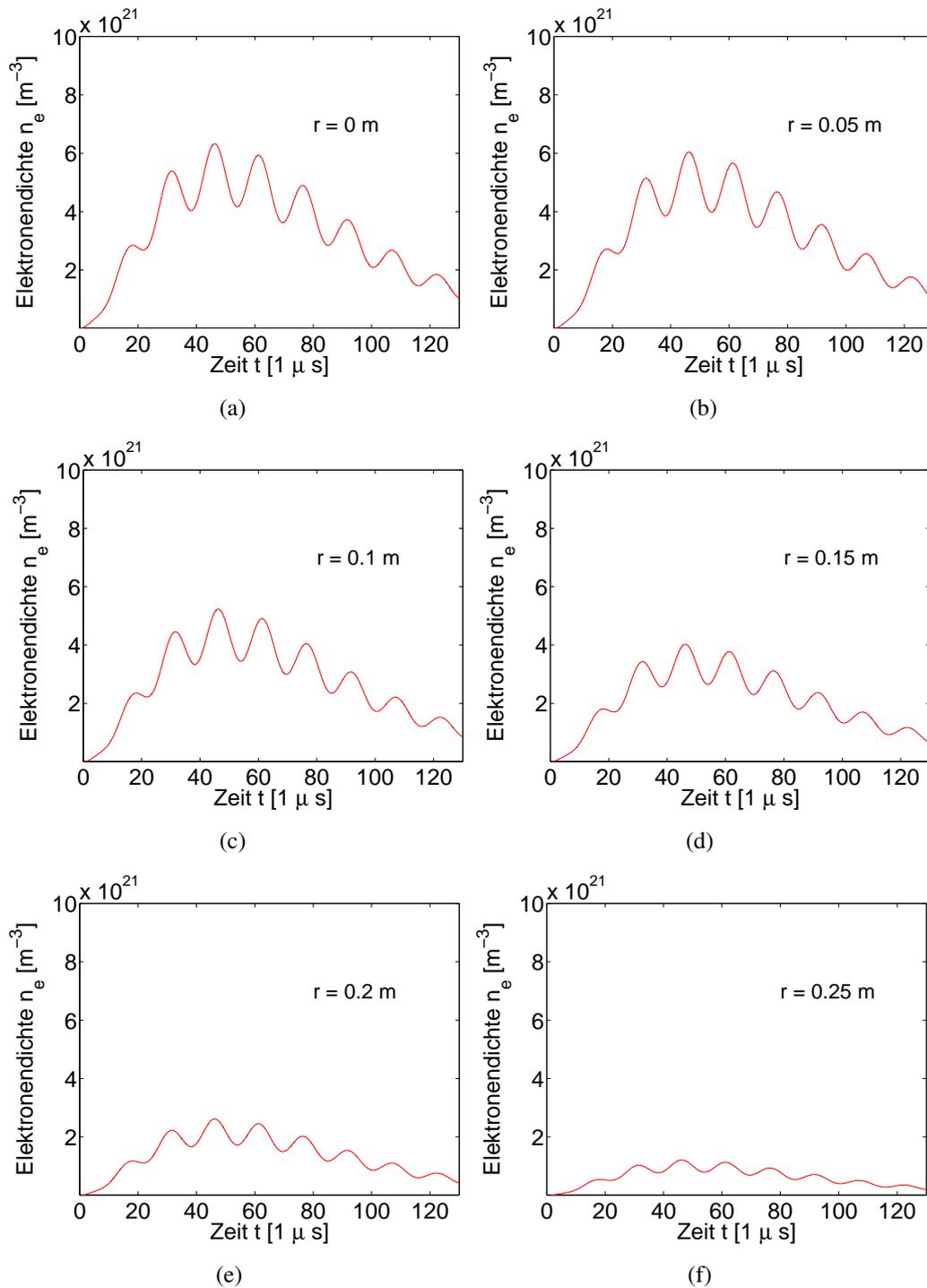
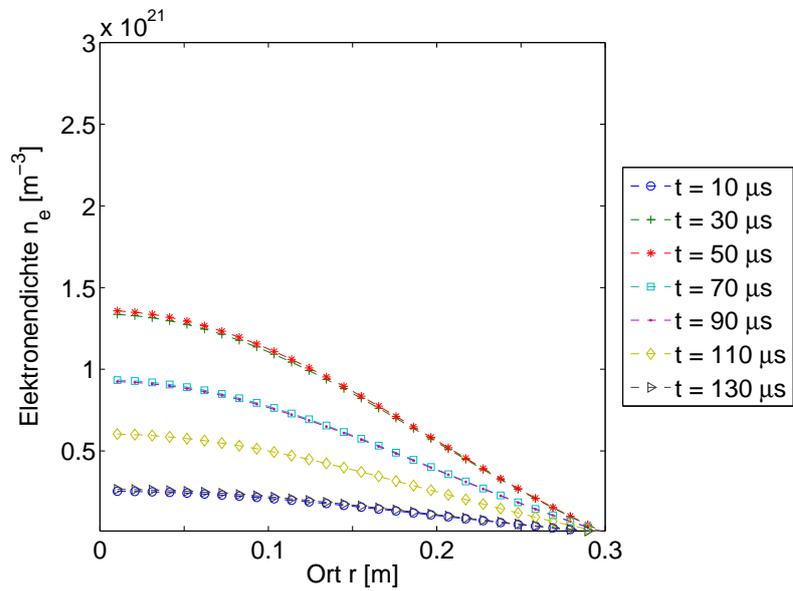


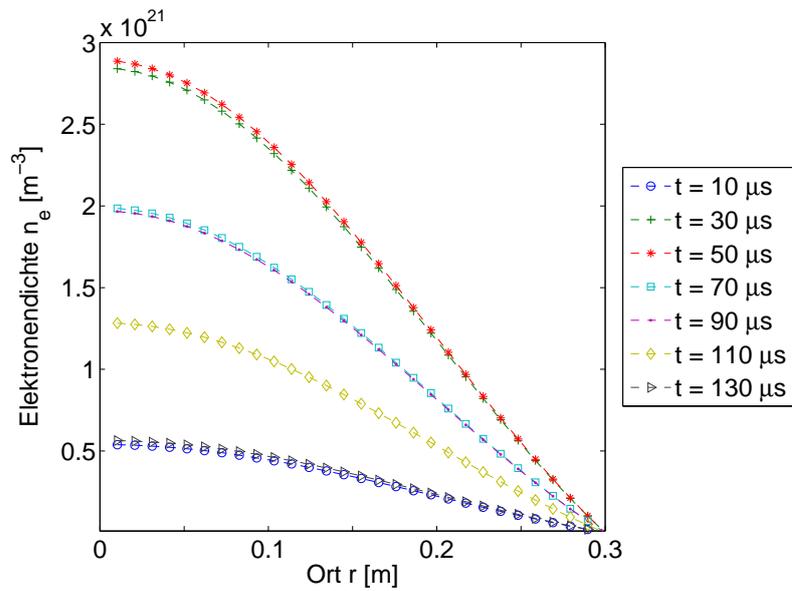
Abbildung 4.3: Berechneter zeitlicher Verlauf der Elektronendichte bei $U=5\text{kV}$ und $p=18\text{Pa}$ bei verschiedenen Radien

$n_e = 7,6 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-3}$ wird bei $U = 5 \text{ kV}$ und $p = 25 \text{ Pa}$ erreicht. Allerdings ist die Elektronendichte nur für ca. $t \approx 5 \mu\text{s}$ oberhalb von $n_e = 7 \cdot 10^{21} \text{ 1/m}^3$. Weiterhin ersichtlich ist, dass die maximale Elektronendichte erst nach ca. $t_{\text{max}} \approx 46 \mu\text{s}$ erreicht wird.

Den räumlichen Verlauf der Elektronendichte zu verschiedenen Zeiten zeigt Abb. 4.4. Hier sind klar die Charakteristiken der sphärischen Bessel-Funktionen zu sehen. Desweiteren ist deutlich die höhere Elektronendichte beim niedrigeren Druck und der höheren Spannung zu erkennen. Begründet ist dies durch die höhere Anregungsenergie und dem für die Kopplung günstigeren Druckbereich. Abbildungen 4.5(a) - 4.5(f) zeigen noch einmal die radiale Elektronendichteverteilung bei $U = 5 \text{ kV}$ und $p = 10 \text{ Pa}$ zu verschiedenen Zeiten dreidimensional. Diese sind wie erwartet sphärisch verteilte Elektronendichten, die zur Mitte des Entladungsgefäßes ansteigen.



(a)



(b)

Abbildung 4.4: Berechneter räumlicher Verlauf der Elektronendichte zu verschiedenen Zeiten bei (a) $U = 4\text{kV}$ und $p = 25\text{Pa}$ und (b) $U = 4,5\text{kV}$ und $p = 8\text{Pa}$

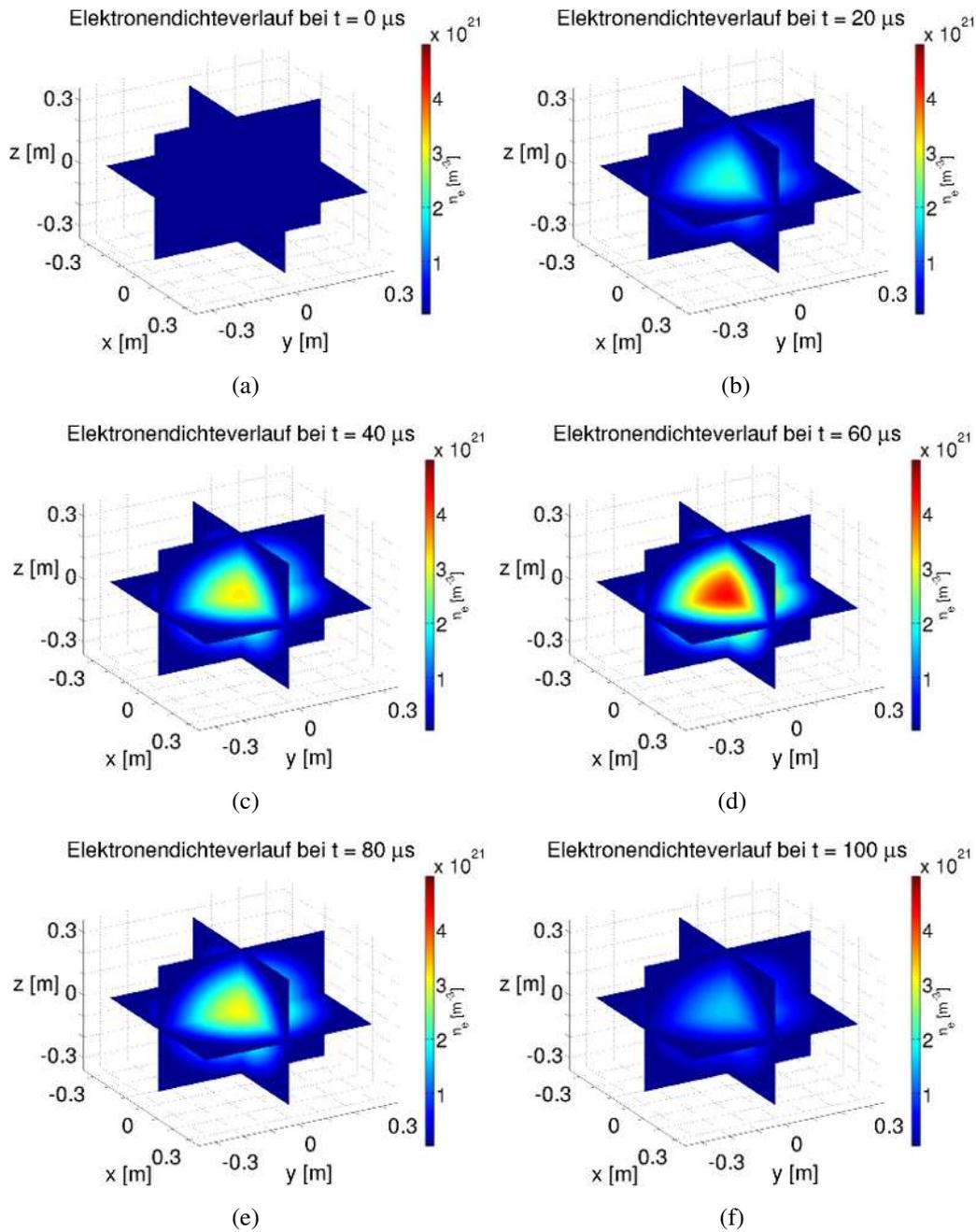


Abbildung 4.5: Berechneter räumlicher Verlauf der Elektronendichte bei $U=5\text{kV}$ und $p=10\text{a}$ zu verschiedenen Zeiten

5 Ausblick

Der Aufbau des Experiments „Prometheus“ liefert durch die getroffene Wahl der Diagnostikmethode nur über die Zeit und den Ort integrierte Größen. Mithilfe der vorliegenden Bachelorarbeit wurde nun ein Modell über die örtliche und zeitliche Elektronendichte basierend auf einer ambipolaren Diffusion und dem zeitlichen Verlauf der elektrisch eingespeisten Leistung erstellt. Um das Modell zu überprüfen, wird im Nachfolgeexperiment „Prometheus II“ (s. Abb. 5.1) ein Linsensystem verwendet, das eine ortsabhängige Elektronendichtemessung ermöglicht. Desweiteren wurde das eingebaute Ignitron durch einen Thyristoren-Schalter ersetzt [TJSW09]. Dieser ist sowohl ökonomischer als auch reproduzierbarer als ein Ignitron, da Ignitrons wegen ihres hohen Quecksilberanteils nicht mehr hergestellt werden dürfen. Erste noch unvollständige Ergebnisse liefern eine recht gute Übereinstimmung mit den vorhergesagten Elektronendichten des Modells.

Desweiteren war die Voraussetzung der Azimutal- bzw. Polarsymmetrie eine recht grobe Näherung. Gerade die Annahme einer Polarsymmetrie ist eigentlich so nicht tragbar, da sich durch die induktive Zündmethode ein magnetisches Feld entlang der Spulenachse bildet. Das so entstandene magnetische Feld hat Auswirkungen auf die Diffusion der Elektronen. Es findet eine veränderte Diffusionsbewegung senkrecht zur axialen Richtung statt. Diese führt zu einer verstärkten Bewegung der Elektronen parallel zum magnetischen Feld, was wiederum zu einer veränderten Rekombination der Elektronen und Ionen zu Neutralgasteilchen führt. Somit wäre die örtliche Elektronendichteverteilung nicht wie hier vorgestellt sphärisch, sondern hätte eine ellipsoide Form. Berücksichtigt wird die veränderte Diffusion durch ein Trennen der axialen und der senkrecht zur Achse gerichteten Bewegung. Dazu verwendet man zwei verschiedene Diffusionskonstanten D_{\perp} und D_{\parallel} . Jedoch ist die daraus resultierende Diffusionsgleichung (Gl. 5.1) nicht analytisch zu lösen.

$$D_{\perp} \left(\frac{\partial^2 n_e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n_e}{\partial y^2} \right) + D_{\parallel} \frac{\partial^2 n_e}{\partial z^2} + \nu_{iz} n_e = 0 \quad (5.1)$$

Zwar lässt sich die Gleichung im kartesischen Koordinatensystem durch Separation der Variablen lösen. Allerdings ist es schwierig die sphärischen Randbedingungen in die

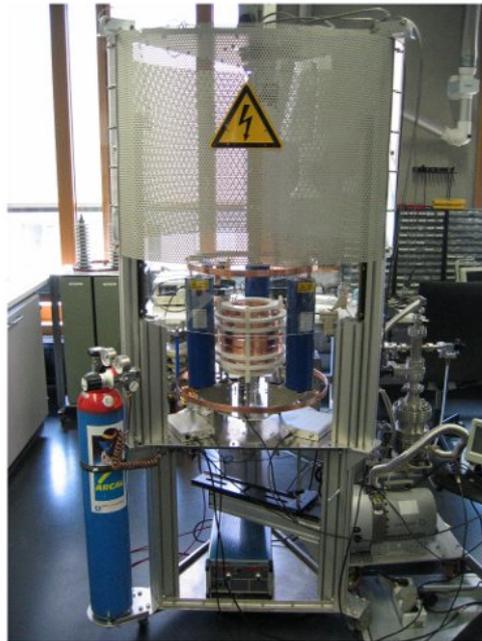


Abbildung 5.1: Vorderansicht des Experiments „Prometheus II“

gewonnene Gleichung einzubauen.

Deshalb müssen Verfahren der Numerischen Mathematik angewendet werden. Eine mögliche Lösungsmethode wäre die Methode der finiten Elemente. Diese diskretisiert den Raum zwischen den Randbedingungen durch Polygone und berechnet die Ableitungen zwischen den Polygonen ausgehend von den gestellten Randbedingungen. Somit entsteht ein lineares Gleichungssystem aus vielen einzelnen Gleichungen.

A Wichtige Integralrechnungen

A.1 Räumliche Mittelung der räumlichen Elektronendichte $n_e(r)$

$$\begin{aligned}\langle n_e \rangle_{\text{räumlich}} &= \frac{1}{V} \int_V n_e(r) dV = \frac{4\pi}{V} \int_{r=0}^{r_0} dr \frac{n_{e,0} r_0}{\pi} r \sin\left(\frac{\pi}{r_0} r\right) \\ &= \frac{4n_{e,0} r_0}{V} \int_{r=0}^{r_0} dr r \sin\left(\frac{\pi}{r_0} r\right) \\ &= \frac{4n_{e,0} r_0}{V} \left(\left[-\frac{r_0 r}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{r_0} r\right) \right]_{r=0}^{r_0} + \frac{r_0}{\pi} \int_{r=0}^{r_0} dr \cos\left(\frac{\pi}{r_0} r\right) \right) \\ &= \frac{4n_{e,0} r_0}{V} \left(-\frac{r_0^2}{\pi} \cos(\pi) + \frac{r_0^2}{\pi^2} \underbrace{\left[\sin\left(\frac{\pi}{r_0} r\right) \right]_{r=0}^{r_0}}_{=0} \right) && \text{part. Integration} \\ &= \frac{4n_{e,0} r_0^3}{\pi V} \\ &= \frac{3n_{e,0}}{\pi^2} && \text{mit Kugelvolumen} \\ &&& V = \frac{4}{3}\pi r_0^3\end{aligned}$$

A.2 Integralrechnungen

Für die zeitliche Auflösung der Elektronendichte ist folgendes Integral zu lösen:

$$\int_{t=0}^{+\infty} t^2 e^{-Bt} \cos^2(\omega t) dt \quad (\text{A.1})$$

Um dieses Integral mittels „Partieller Integration“ lösen zu können, müssen zunächst mehrere Integrale gelöst werden:

$$\begin{aligned}
 \int_{t=0}^{+\infty} t e^{-Bt} dt &\stackrel{\text{part.Int.}}{=} \underbrace{\left[-\frac{t}{B} e^{-Bt} \right]_{t=0}^{+\infty}}_{=0} + \frac{1}{B} \int_{t=0}^{+\infty} e^{-Bt} dt \\
 &= -\frac{1}{B^2} \left[e^{-Bt} \right]_{t=0}^{+\infty} \\
 &= \frac{1}{B^2}
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{t=0}^{+\infty} t^2 e^{-Bt} dt &\stackrel{\text{part.Int.}}{=} \underbrace{\left[-\frac{t^2}{B} e^{-Bt} \right]_{t=0}^{+\infty}}_{=0} + \frac{2}{B} \int_{t=0}^{+\infty} t e^{-Bt} dt \\
 &\stackrel{\text{part.Int.}}{=} \frac{2}{B} \left(\underbrace{\left[-\frac{t}{B} e^{-Bt} \right]_{t=0}^{+\infty}}_{=0} + \frac{1}{B} \int_{t=0}^{+\infty} e^{-Bt} dt \right) \\
 &= \frac{2}{B^3}
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{t=0}^{+\infty} e^{-Bt} \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt &\stackrel{\text{part.Int.}}{=} \underbrace{\left[-\frac{1}{\omega} \cos^2(\omega t) e^{-Bt} \right]_{t=0}^{+\infty}}_{=\frac{1}{\omega}} \\
 &\quad - \frac{1}{\omega} \int_{t=0}^{+\infty} e^{-Bt} \cos(\omega t) (B \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)) dt \\
 &= \frac{1}{\omega} - \frac{B}{\omega} \int_{t=0}^{+\infty} e^{-Bt} \cos^2(\omega t) dt - \int_{t=0}^{+\infty} e^{-Bt} \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt \\
 &= \frac{1}{2\omega} - \frac{B}{2\omega} \int_{t=0}^{+\infty} e^{-Bt} \cos^2(\omega t) dt
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{t=0}^{+\infty} e^{-Bt} \cos^2(\omega t) dt &\stackrel{\text{part.Int.}}{=} \underbrace{\left[-\frac{1}{\omega} e^{-Bt} \cos(\omega t) \sin(\omega t) \right]_{t=0}^{+\infty}}_{=0} \\
 &+ \frac{1}{\omega} \int_{t=0}^{+\infty} e^{-Bt} \sin(\omega t) (B \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)) dt \\
 &= \frac{B}{\omega} \int_{t=0}^{+\infty} e^{-Bt} \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt + \int_{t=0}^{+\infty} e^{-Bt} \underbrace{\sin^2(\omega t)}_{1-\cos^2(\omega t)} dt \\
 &= \frac{B}{2\omega} \int_{t=0}^{+\infty} e^{-Bt} \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt - \frac{1}{2B} [e^{-Bt}]_{t=0}^{+\infty} \\
 &= \frac{1}{2B} + \frac{B}{2\omega} \int_{t=0}^{+\infty} e^{-Bt} \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt \\
 &\stackrel{\text{mit Gl.A.4}}{=} \frac{1}{2B} + \frac{B}{4\omega^2} - \frac{B^2}{4\omega^2} \int_{t=0}^{+\infty} e^{-Bt} \cos^2(\omega t) dt \\
 &= \frac{1}{2B} \left(1 + \frac{\left(\frac{B}{2\omega}\right)^2}{1 + \left(\frac{B}{2\omega}\right)^2} \right)
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{t=0}^{+\infty} t e^{-Bt} \cos^2(\omega t) dt &\stackrel{\text{part.Int.}}{=} \underbrace{\left[-\frac{1}{\omega} e^{-Bt} t \cos^2(\omega t) \right]_{t=0}^{+\infty}}_{=0} \\
 &+ \frac{1}{\omega} \int_{t=0}^{+\infty} e^{-Bt} \cos(\omega t) (\cos(\omega t) - Bt \cos(\omega t) - \omega t \sin(\omega t)) dt \\
 &= \frac{1}{\omega} \int_{t=0}^{+\infty} e^{-Bt} \cos^2(\omega t) dt - \frac{B}{\omega} \int_{t=0}^{+\infty} t e^{-Bt} \cos^2(\omega t) dt \\
 &- \int_{t=0}^{+\infty} t e^{-Bt} \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt \\
 &\stackrel{\text{mit Gl.A.5}}{=} \frac{1}{4B\omega} \left(1 + \frac{\left(\frac{B}{2\omega}\right)^2}{1 + \left(\frac{B}{2\omega}\right)^2} \right) - \frac{B}{2\omega} \int_{t=0}^{+\infty} t e^{-Bt} \cos^2(\omega t) dt
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{t=0}^{+\infty} t e^{-Bt} \cos^2(\omega t) dt & \stackrel{\text{part.Int.}}{=} \underbrace{\left[\frac{t}{\omega} e^{-Bt} \cos(\omega t) \sin(\omega t) \right]_{t=0}^{+\infty}}_{=0} \\
 & - \frac{1}{\omega} \int_{t=0}^{+\infty} e^{-Bt} \sin(\omega t) (-Bt \cos(\omega t) + \cos(\omega t) - \omega t \sin(\omega t)) dt \\
 & = \frac{B}{\omega} \int_{t=0}^{+\infty} t e^{-Bt} \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt \\
 & - \frac{1}{\omega} \int_{t=0}^{+\infty} e^{-Bt} \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt + \int_{t=0}^{+\infty} t e^{-Bt} \underbrace{\sin^2(\omega t)}_{1-\cos^2(\omega t)} dt \\
 & = \frac{B}{2\omega} \int_{t=0}^{+\infty} t e^{-Bt} \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt \\
 & - \frac{1}{2\omega} \int_{t=0}^{+\infty} e^{-Bt} \sin \omega t \cos \omega t dt + \frac{1}{2} \int_{t=0}^{+\infty} t e^{-Bt} dt \\
 & \stackrel{\text{mit Gl.A.6,A.4,A.2}}{=} \frac{1}{1 + \left(\frac{B}{2\omega}\right)^2} \left(\frac{1}{2B^2} + \frac{1}{4\omega^2} \frac{\left(\frac{B}{2\omega}\right)^2}{1 + \left(\frac{B}{2\omega}\right)^2} \right)
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

Nun lässt sich das ursprünglich zu lösende Integral berechnen:

$$\begin{aligned}
 \int_{t=0}^{+\infty} t^2 e^{-Bt} \cos^2(\omega t) dt &\stackrel{\text{part.Int.}}{=} \underbrace{\left[\frac{1}{\omega} t^2 e^{-Bt} \cos(\omega t) \sin(\omega t) \right]_{t=0}^{+\infty}}_{=0} \\
 &- \frac{1}{\omega} \int_{t=0}^{+\infty} e^{-Bt} \sin(\omega t) \cos(\omega t) (-Bt^2 + 2t) dt + \int_{t=0}^{+\infty} e^{-Bt} t^2 \underbrace{\sin^2(\omega t)}_{=1-\cos^2(\omega t)} dt \\
 &\stackrel{\text{mit Gl.A.3}}{=} \frac{1}{B^3} - \frac{1}{2\omega} \int_{t=0}^{+\infty} e^{-Bt} \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt \\
 &\stackrel{\text{part.Int.}}{=} \frac{1}{B^3} - \frac{1}{2\omega} \left(\underbrace{\left[-\frac{1}{\omega} e^{-Bt} \cos \omega t (2t - Bt^2) \right]_{t=0}^{+\infty}}_{=0} \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{\omega} \int_{t=0}^{+\infty} e^{-Bt} \cos(\omega t) \left(\cos(\omega t) (-4Bt + B^2 t^2 + 2) - \omega \sin(\omega t) (2t - Bt^2) \right) dt \right) \\
 &= \frac{1}{B^3} - \frac{1}{\omega^2} \int_{t=0}^{+\infty} \cos^2(\omega t) (-4Bt + B^2 t^2 + 2) dt \\
 &+ \frac{1}{2\omega} \int_{t=0}^{+\infty} (2t - Bt^2) \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt \\
 &= \frac{1}{B^3} - \frac{1}{4\omega^2} \int_{t=0}^{+\infty} \cos^2(\omega t) (-4Bt + B^2 t^2 + 2) dt \\
 &= \frac{1}{B^3} - \frac{1}{2\omega^2} \int_{t=0}^{+\infty} e^{-Bt} \cos^2(\omega t) dt + \frac{B}{\omega^2} \int_{t=0}^{+\infty} t e^{-Bt} \cos^2(\omega t) dt \\
 &- \frac{B^2}{4\omega^2} \int_{t=0}^{+\infty} t^2 e^{-Bt} \cos^2(\omega t) dt \\
 &= \frac{1}{1 + \left(\frac{B}{2\omega}\right)^2} \left(\frac{1}{B^3} - \frac{1}{2\omega^2} \int_{t=0}^{+\infty} e^{-Bt} \cos^2(\omega t) dt + \frac{B}{\omega^2} \int_{t=0}^{+\infty} t e^{-Bt} \cos^2(\omega t) dt \right)
 \end{aligned}$$

(A.8)

Mit den Gl. A.5 und A.7 folgt:

$$\int_{t=0}^{+\infty} t^2 e^{-Bt} \cos^2(\omega t) dt = \frac{1}{1 + \left(\frac{B}{2\omega}\right)^2} \left(\frac{1}{B^3} - \frac{1}{B\omega^2} \frac{\left(\frac{B}{2\omega}\right)^2}{1 + \left(\frac{B}{2\omega}\right)^2} + \frac{B}{4\omega^4} \frac{\left(\frac{B}{2\omega}\right)^2}{\left(1 + \left(\frac{B}{2\omega}\right)^2\right)^2} \right) \quad (\text{A.9})$$

Da nun aber $B \ll \omega^2$ gilt, folgt $\left(\frac{B}{2\omega}\right)^2 \approx 0$. Damit ergibt sich für das Integral:

$$\int_{t=0}^{+\infty} t^2 e^{-Bt} \cos^2(\omega t) dt \approx \frac{1}{B^3} \quad (\text{A.10})$$

Literaturverzeichnis

- [BD05] BOYCE, W. E. ; DIPRIMA, R. C.: *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. 8. Auflage. New York : John Wiley and Sons, Inc., 2005
- [Gey08] GEY, M.H.: *Instrumentelle Analytik und Bioanalytik*. 2. Auflage. Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 2008
- [Göh02] GÖHRING, D.: *Digitalkameratechnologien - Eine vergleichende Betrachtung - CCD kontra CMOS*, Humboldt-Universität Berlin, Seminararbeit, August 2002
- [GR98] GOLDSTON, R. J. ; RUTHERFORD, P. H.: *Plasmaphysik - Eine Einführung*. Braunschweig/Wiesbaden : Friedrich Vieweg und Sohn Verlagsgesellschaft mbH, 1998
- [Gre03] GREINER, W.: *Klassische Mechanik II*. 7. Auflage. Frankfurt am Main : Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch GmbH, 2003
- [Gre08] GREINER, W.: *Klassische Elektrodynamik*. 7. Auflage. Frankfurt am Main : Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch GmbH, 2008
- [Gri64] GRIEM, H. R.: *Plasma Spectroscopy*. New York : McGraw-Hill Book Company, 1964
- [IPP06] *IPP Summer University for Plasma Physics*. 2006
- [Jac99] JACKSON, J. D.: *Classical Electrodynamics*. 3. Auflage. New York : John Wiley and Sons, Inc., 1999
- [Kih52] KIHARA, T.: The mathematical theory of electrical discharges in gases. In: *Reviews of modern physics* Vol. 24 (1952), Januar, Nr. 1, S. 45–61
- [LL94] LIEBERMAN, M. A. ; LICHTENBERG, A. J.: *Principles of Plasma Discharges and Materials Processing*. New York : John Wiley and Sons, Inc., 1994

- [Mes02] MESCHEDE, D.: *Gerthsen Physik*. 21. Auflage. Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 2002
- [P⁺92] PIEJAK, R. B. u. a.: A simple analysis of an inductive RF discharge. In: *Plasma Sources Sci. Technol.* (1992), Nr. 1, S. 179–186
- [P⁺05] PITKA, R. u. a.: *Physik. Der Grundkurs*. 3. Auflage. Frankfurt am Main : Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch GmbH, 2005
- [Pet] PETZKE, F.: *Skriptum zum Praktikum über optische Molekülspektroskopie*. – Vorlesungsskript Universität Mainz
- [Pria] PRINCETON INSTRUMENTS (Hrsg.): *Datasheet: Acton Standard Series of Monochromators and Spectrographs*. New Jersey: Princeton Instruments
- [Prib] PRINCETON INSTRUMENTS (Hrsg.): *Datasheet: PIXIS 256*. New Jersey: Princeton Instruments
- [Stö05] STÖCKER, H.: *Taschenbuch der Physik*. 5. Auflage. Frankfurt am Main : Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch, 2005
- [Tes] TESKE, C.: *Ausarbeitungen zur Vorlesung Plasmaphysik*
- [TJ08] TESKE, C. ; JACOBY, J.: Pulsed Low Frequency Inductively Coupled Plasma Generator and Applications. In: *IEEE Transactions on Plasma Science* Vol. 36 (2008), August, Nr. 4
- [TJSW09] TESKE, C. ; JACOBY, J. ; SCHWEIZER, W. ; WIECHULA, J.: Thyristor stack for pulsed inductive plasma generation. In: *Review of Scientific Instruments* Vol. 80 (2009)

Danksagung

- Zuerst möchte ich Herrn Prof. Dr. Joachim Jacoby für die freundliche und schnelle Aufnahme in seine Arbeitsgruppe und die hilfreiche Unterstützung bei der Anfertigung der Bachelorarbeit danken. Die interessanten Diskussionen in der Mittagspause haben mein Interesse für die Plasmaphysik verstärkt.
- Weiterhin bedanken möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Joachim Maruhn für seine Hilfe bei der Lösung der partiellen Differentialgleichung und der Erstellung des Zweitgutachten.
- Ein besonderer Dank geht an meinen Betreuer Herrn Dr. Christian Teske, der mir bei all den zahlreichen Fragen stets durch seine enorme fachliche Kompetenz zur Seite stand.
- Herrn Jörg Wiechula möchte ich für die unterhaltsamen Augenblicke in den Schreibpausen danken.
- Mein Dank geht auch an Frau Astrid Hergt für die Unterstützung bei allen organisatorischen Problemen.
- Der gesamten Arbeitsgruppe Plasmaphysik möchte ich für die schöne, doch leider kurze, Zeit danken.

Zuletzt möchte ich mich bei meinen Eltern und meiner Schwester Cornelia bedanken, die mich zu jeder Zeit meines Lebens, uneingeschränkt unterstützt haben und hoffentlich unterstützen werden. Ohne sie wäre mein bisheriger Studienverlauf nicht so erfolgreich verlaufen.

Besonders danke ich auch meiner Freundin Carina, für ihr Verständnis für mein zeitraubendes Studium, ihre vorbehaltlose Unterstützung und die Verschönerung meines Lebens.