



# **Sensitivität der Modellergebnisse gegenüber unsicheren Eingangsdaten**

**N. Fohrer\*, A. van Griensven**

**\*CAU Kiel**

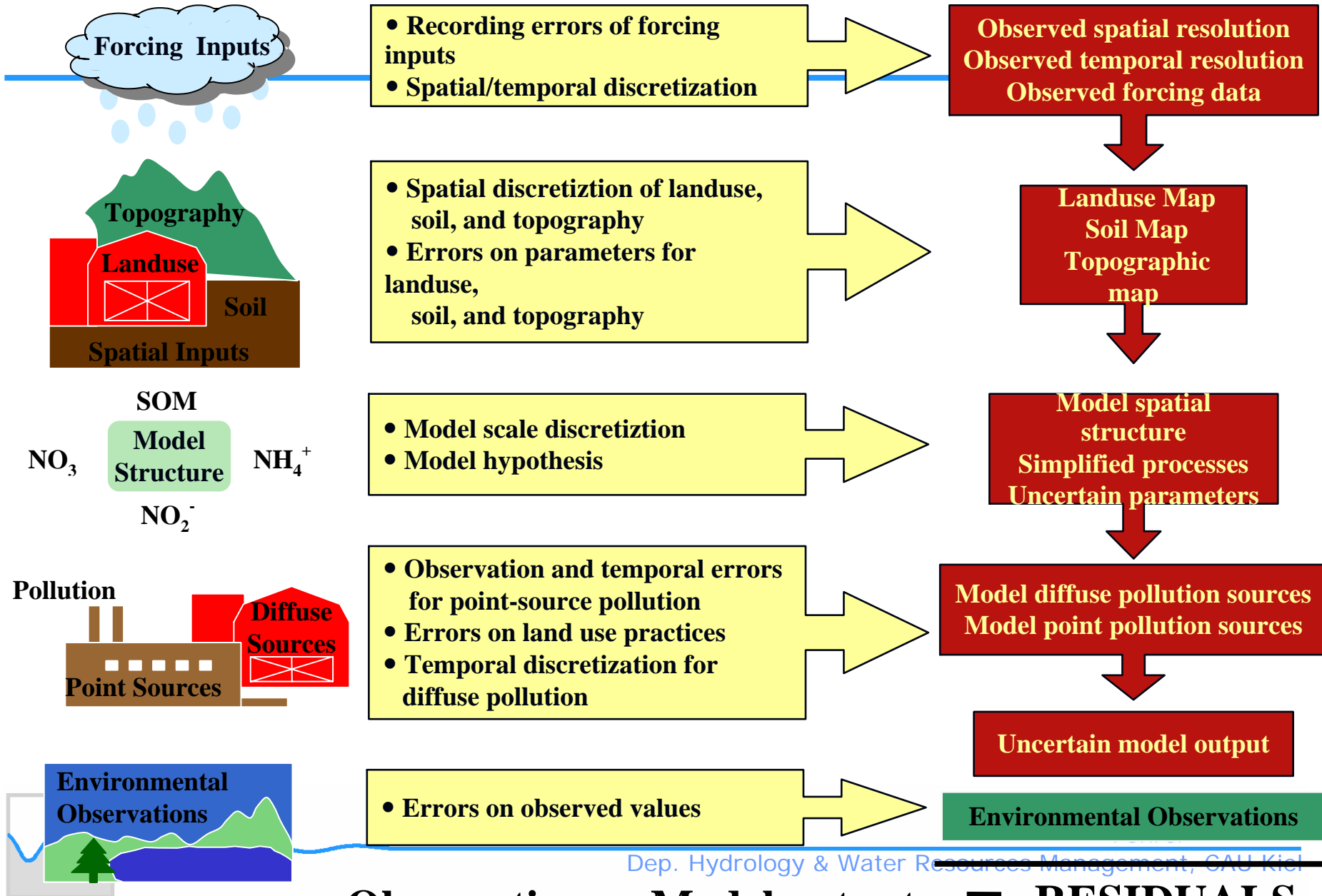
# **Ursachen für Unsicherheit in den Eingangsdaten**

# Reale Werte

Im Raum/Zeitkontinuum

# Quellen für Unsicherheit

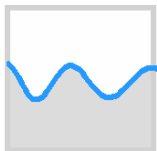
# Abstraktion im Modell



# Grundprobleme

---

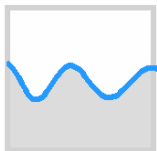
- Nicht alle Parameter sind direkt, fehlerfrei messbar oder im voraus abschätzbar.
- Modell-Kalibrierung notwendig
- Optimierung der Parameterauswahl durch Vergleich von gemessener und simulierter Ganglinie
- Hoher Parametrisierungsgrad
- Problem der Equifinalität



# Implikationen

---

- Durch Eichung ermittelte Parameter sind nur innerhalb der Modellstruktur, die für die Eichung genutzt wurde valide. Man kann sie nicht für andere Modellparametrisierungen verwenden.
- Es gibt nicht nur ein optimales Parameterset.
- Innewohnende Unsicherheit muß quantifiziert werden.
- Die Aussageschärfe von Modellen muss zur Unsicherheit in Bezug gesetzt werden.

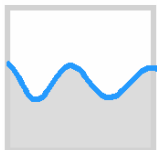


# **Sensitivitätsanalyse**

# Ziele der Sensitivitätsanalyse (SA)

---

- Quantifizierung der Änderung der Modellausgabe, die von der Änderung der Modelleingabe verursacht wird.
  - Identifikation der Parameter, für die man besonders genaue Eingangsinformation braucht
  - Verständnis des Modellsystems
  - Beurteilung der Anwendbarkeit des Modells auf eine bestimmte Fragestellung



Many parameters



Sensitivity analysis

Important parameters



Optimisation

Good parameter sets



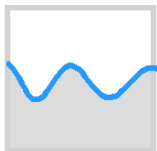
Uncertainty analysis

Effect of uncertainty on results



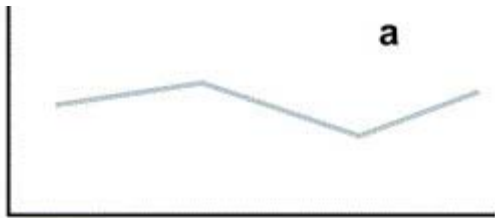
Scenario analysis

Reliability of scenario results

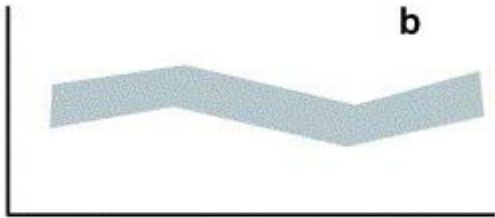




# Beziehung zwischen Parameterunsicherheit und Aussageschärfe der Modellergebnisse



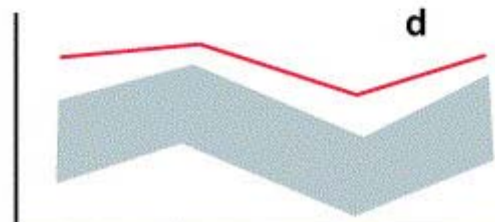
Die Realisierung eines einzigen Parametersets liefert eine eindeutige Modellreaktion (a),



Unsichere Eingangsparameter verursachen je nach Streubreite Unschärfen in der Modellausgabe (b and c).



Je größer die Parameterunsicherheit und je sensibler ein Parameter ist, um so größer wird die Aussageunschärfe des Modells (c).



Wenn trotz Ausschöpfung des physikalisch sinnvollen Parameterraums die Messwerte nicht abgebildet werden können, dann muss die Modellstruktur re-evaluiert werden. (d).

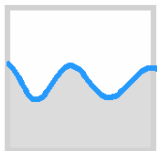
nach Abbaspour et al., 2006

# **Methoden der Sensitivitätsanalyse**

# Merkmale der SA

---

- 1. Beprobungsstrategie im Parameterraum
- 2. numerische oder visuelle Methode zur Quantifizierung der Parameterwirkung auf das Modellergebnis
- 3. lokale Methoden (z.B. PEST)
- 4. Global Methods (z.B. RSA, ANOVA, Sobol's)



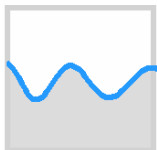
# Vergleich von Methoden der Sensitivitätsanalyse

Table 1. Summary of sensitivity analysis tools in the study.

Tools	Local/Global	Interactions	Sampling	Quantify/Visualize
PEST	Local	No	Local Perturbation	Composite Sensitivity
RSA	Global	No	Latin Hypercube Sampling	CDF Plots
ANOVA	Global	Yes	Iterated Fractional Factorial Design	F-Values
Sobol's	Global	Yes	Quasirandom	Sensitivity Indices

Sobol's > ANOVA >> RSA >>> PEST

**Tang et al., 2007**

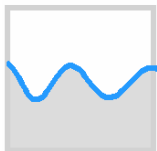


# Lokale Sensitivitätsanalyse

---

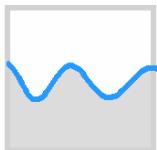
- Vorteile:
  - Einfach zu implementieren und durchzuführen
  - Recheneffizient und schnell
  - Sensitivität ist eindeutig einem Eingangsparameter zugeordnet
- Nachteil:
  - Ausschließlich Erfassung der lokalen Sensitivität
  - Keine **Interaktion** zwischen den Parametern

Slide after Huisman, 2004

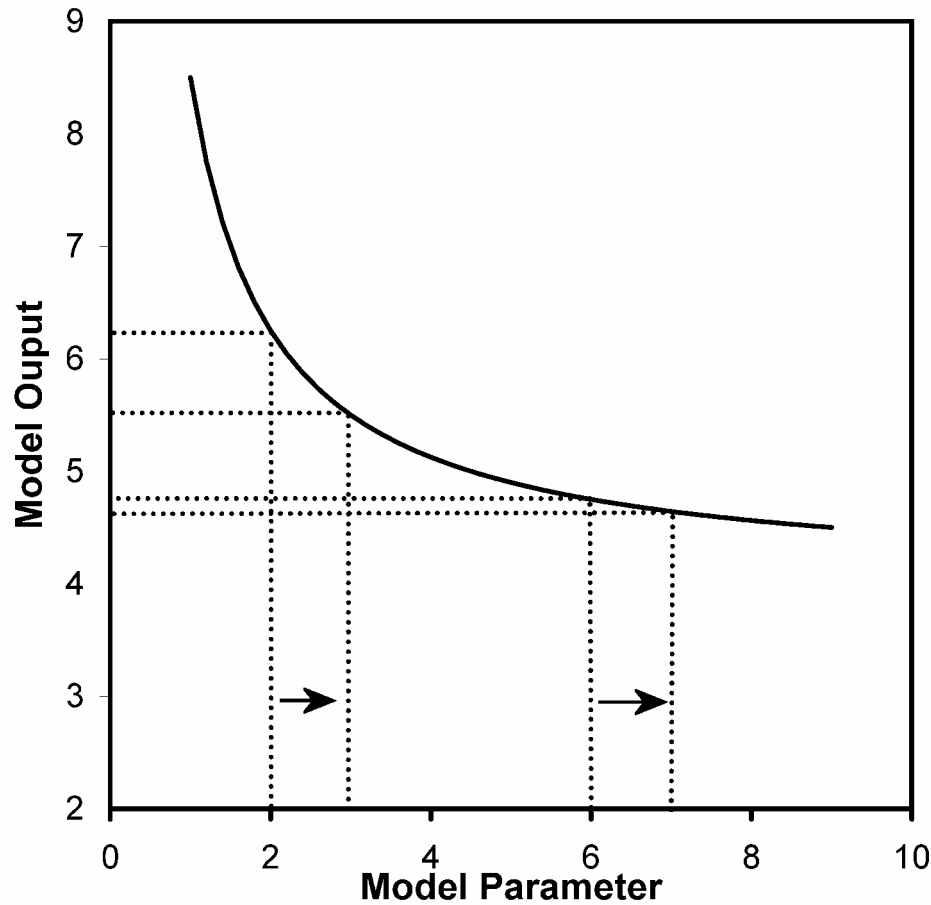


# Beispiel: lokale Sensitivität bodenphysikalischer Eingabeparameter für das Modell SWAT

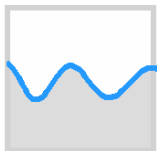
Parameter	Getesteter Wertebereich	Sensitivitätsindices	
		Zwischenabfluss	Grundwasserneubildung
Gesättigte Wasserleitfähigkeit [cm/d]	350 bis 860	0,9	0,2
Trockenrohdichte [g/cm <sup>3</sup> ]	1,4 bis 1,6	0,8	0,1
Nutzbare Feldkapazität [mm]	65 bis 115	0,2	0,2
Horizontmächtigkeit [mm]	500 bis 700	0,0	0,1



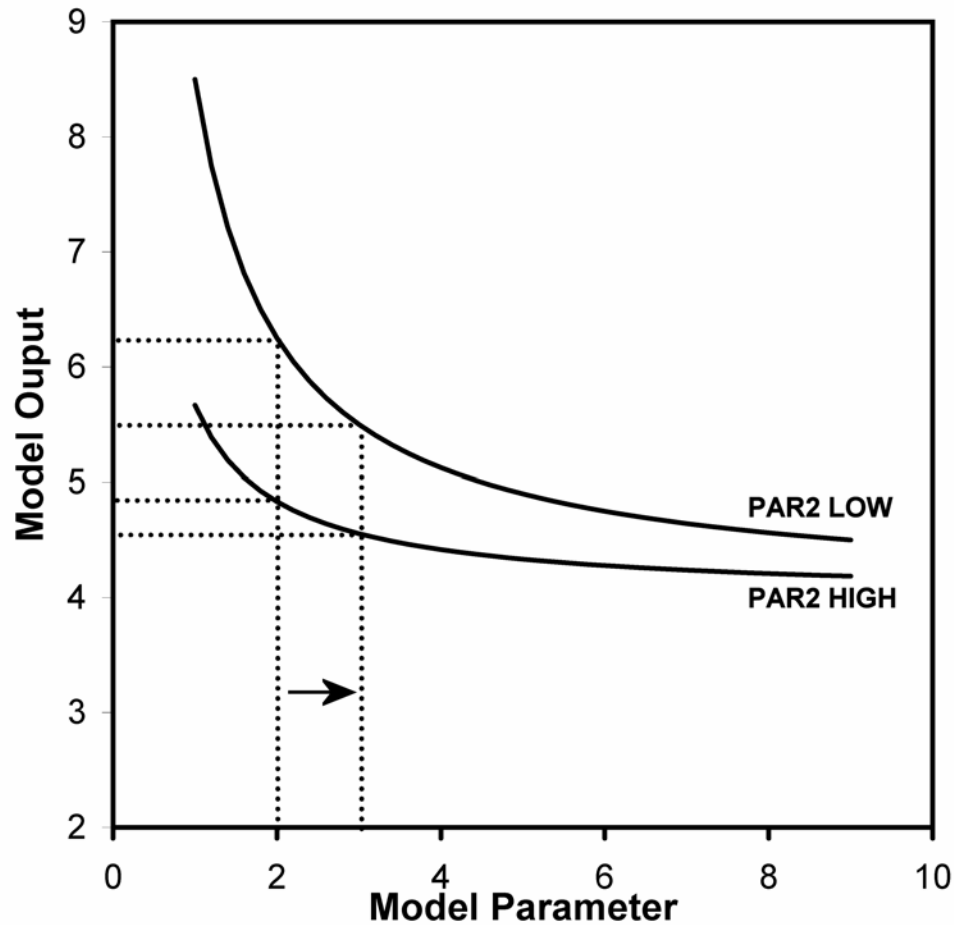
# Ist die Sensitivität eines Parameters unabhängig von der Höhe des eingesetzten Wertes?



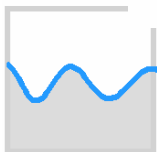
Slide after Huisman, 2004



# Ist die Sensitivität eines Parameters unabhängig von anderen Parametern?

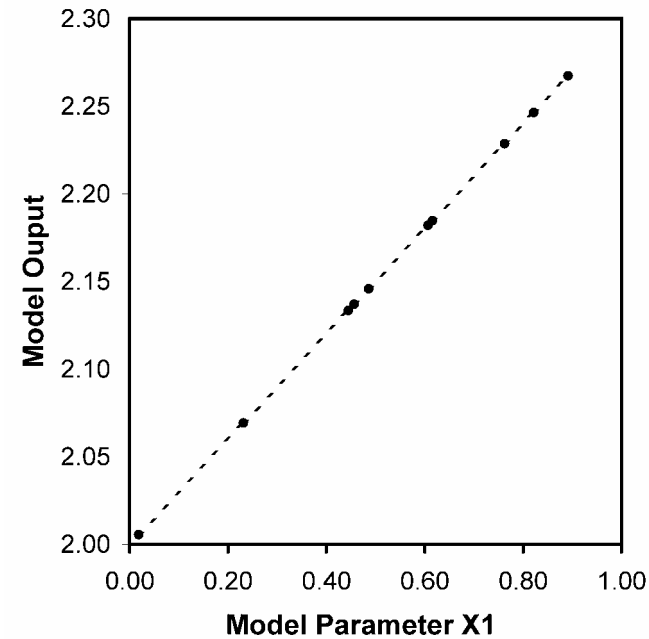
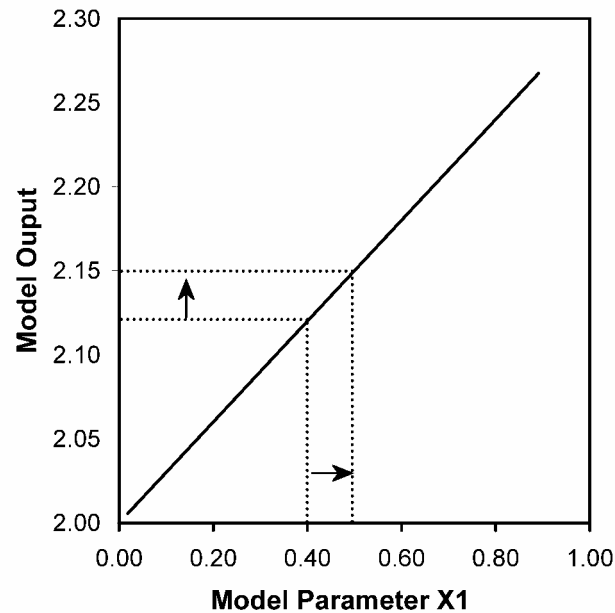


Slide after Huisman, 2004





# Globale Methoden: z.B. Monte Carlo SA I



1. Draw n parameter sets from predefined probability distributions

2. Run model n times

Slide after Huisman, 2004

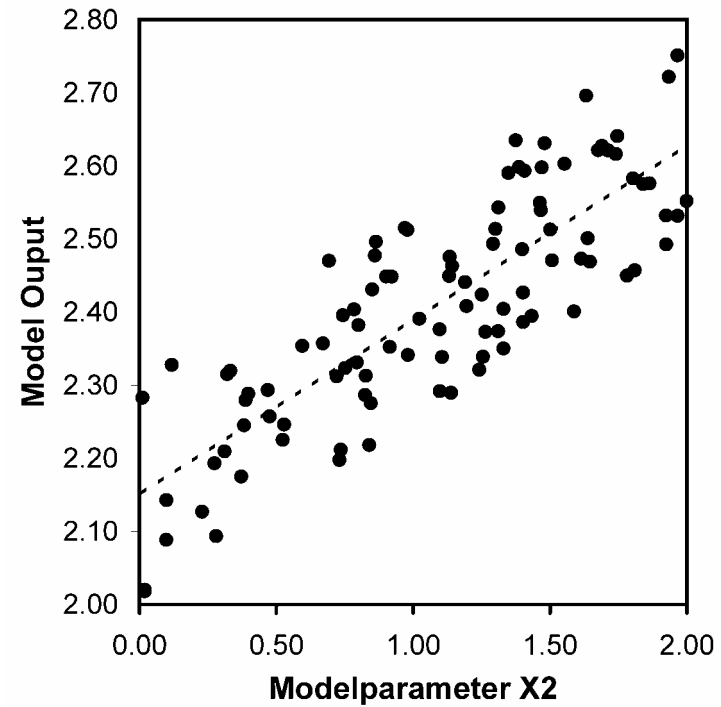
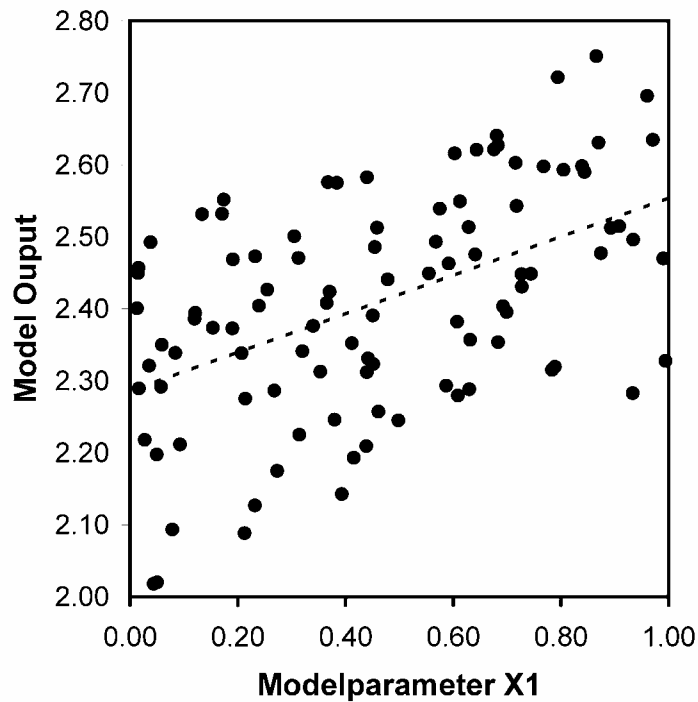
3. Determine sensitivity of each model parameter

Fohrer

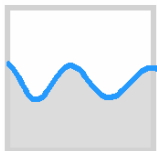
Dep. Hydrology & Water Resources Management, CAU Kiel

# Monte Carlo SA II

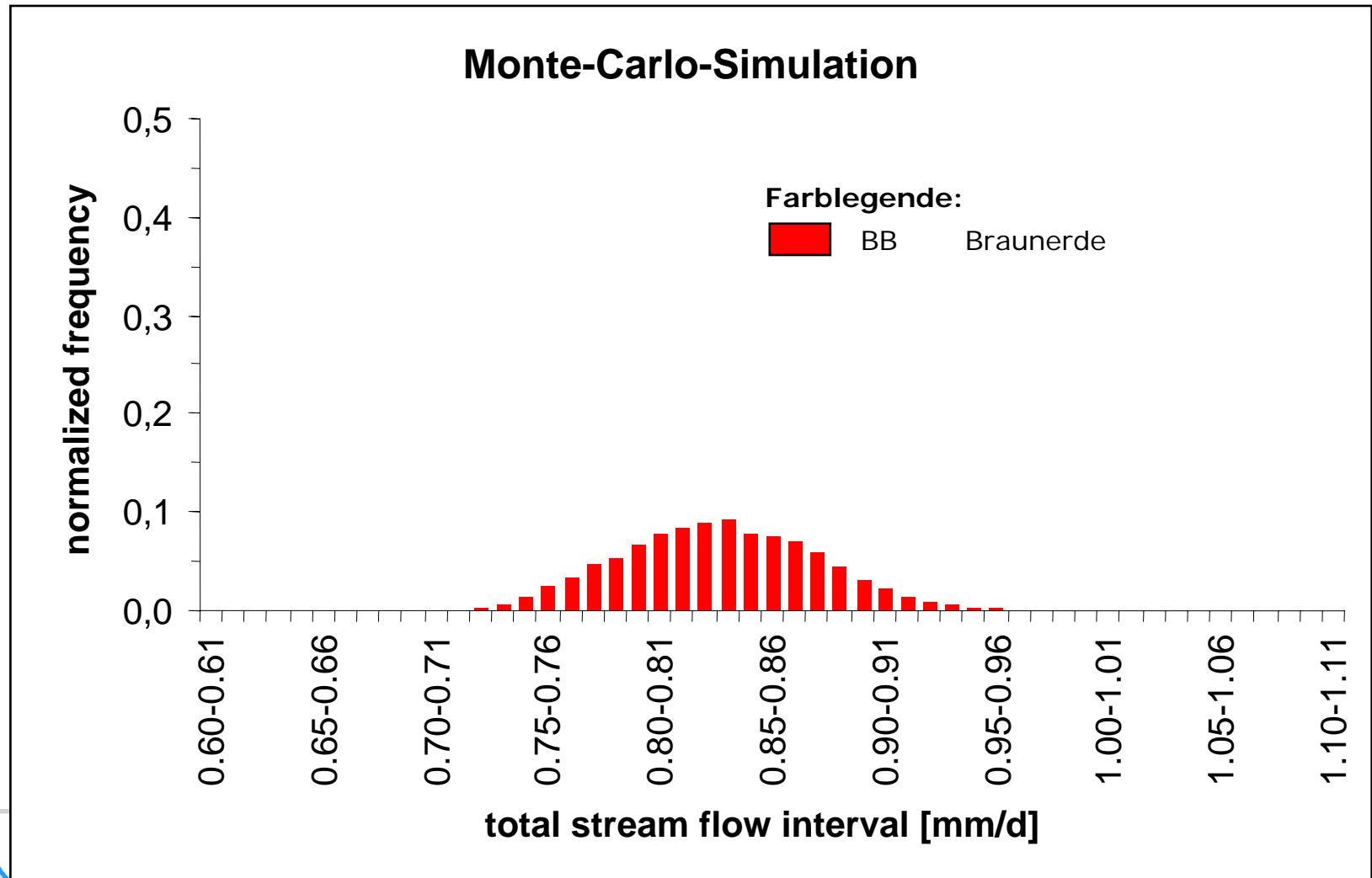
Slide after Huisman, 2004



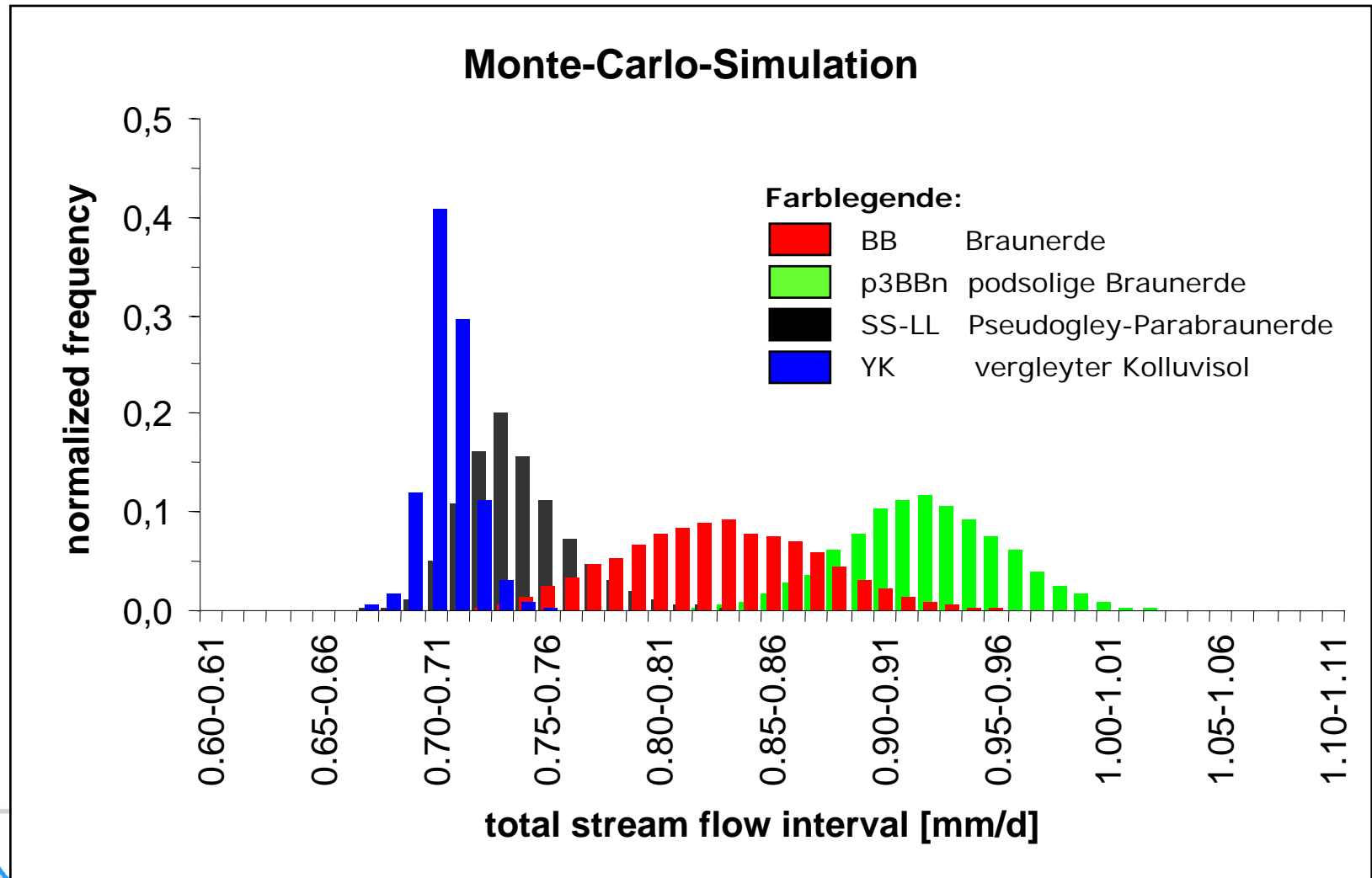
$$y(s) = \hat{\beta}_0 + \sum_{i=1}^p \hat{\beta}_i x_i(s) + \hat{e}(s)$$

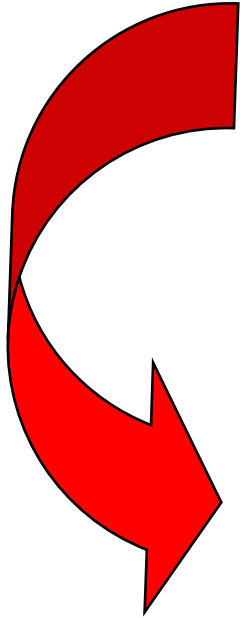


# Ausprägung der Bodenformen auf den Gerinneabfluss - Regionale Skala -

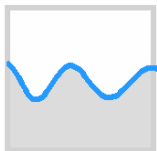


# Ausprägung der Bodenformen auf den Gerinneabfluss - Regionale Skala -





**Die Bodenparameter sind hoch sensitiv, dennoch ist die Unsicherheit in den Eingangsdaten so groß, dass sie sich in ihrer hydrologischen Wirkung hydrologisch nicht unterscheiden lassen.**

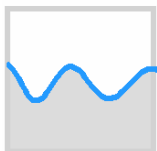


# Sensitivitätsanalyse durch Monte Carlo Simulation

---

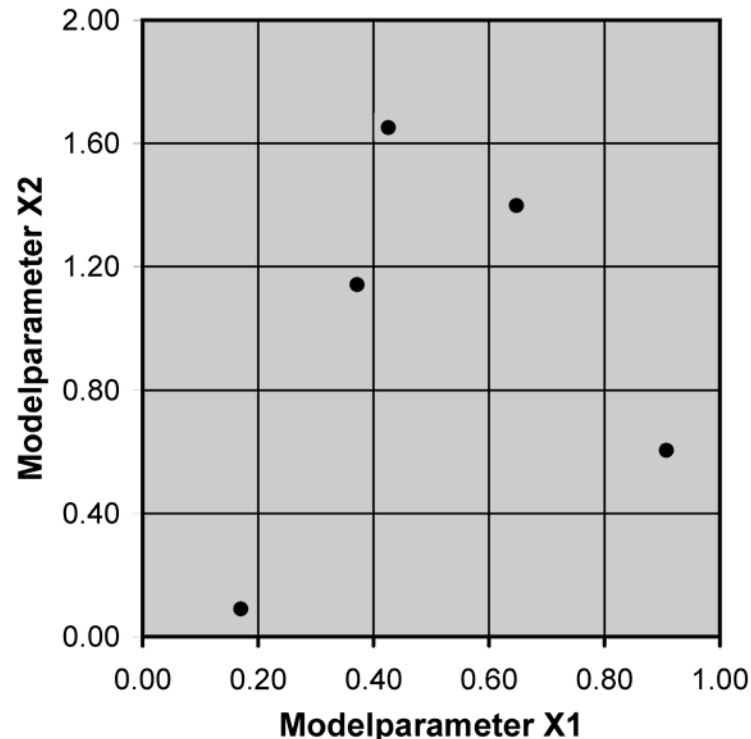
- Vorteile:
  - Sensitivität wird für den gesamten Parameterraum bestimmt
  - Korrelationen zwischen den Parametern werden berücksichtigt
- Nachteile:
  - Annahme der Linearität in multiplen Regressionen
  - Sensitivität wird kann nicht eindeutig einem Parameter zugeordnet werden
  - **Hoher Rechenzeitbedarf**
  - **Kein Ranking der Parameter möglich**

Slide after Huisman, 2004



# Latin Hypercube Sampling

Nimm N Stichproben. Jedes Stratum darf nur max. einmal beprobt werden.

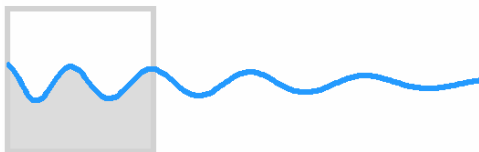


Vorteil: weniger  
Rechenläufe nötig

Nachteil:  
Kein Bezug zum  
Einzelparameter

Fohrer

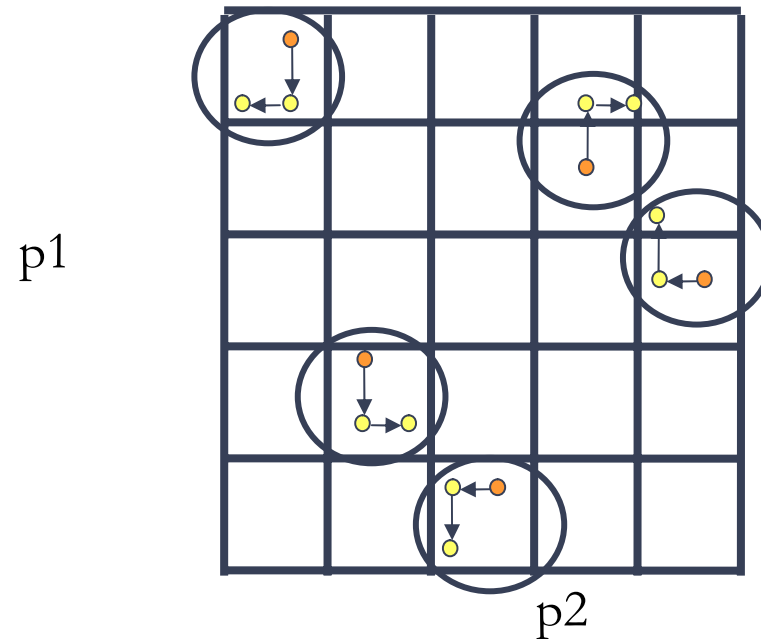
Dep. Hydrology & Water Resources Management, CAU Kiel



# LH-OAT

## Latin Hypercube sampling

- divide parameter range in  $m$  intervals
- “Randomly” sample  $m$  points in a way that each interval has 1 point



**v. Griensven, 2005**

## One factor at a Time:

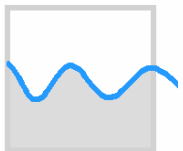
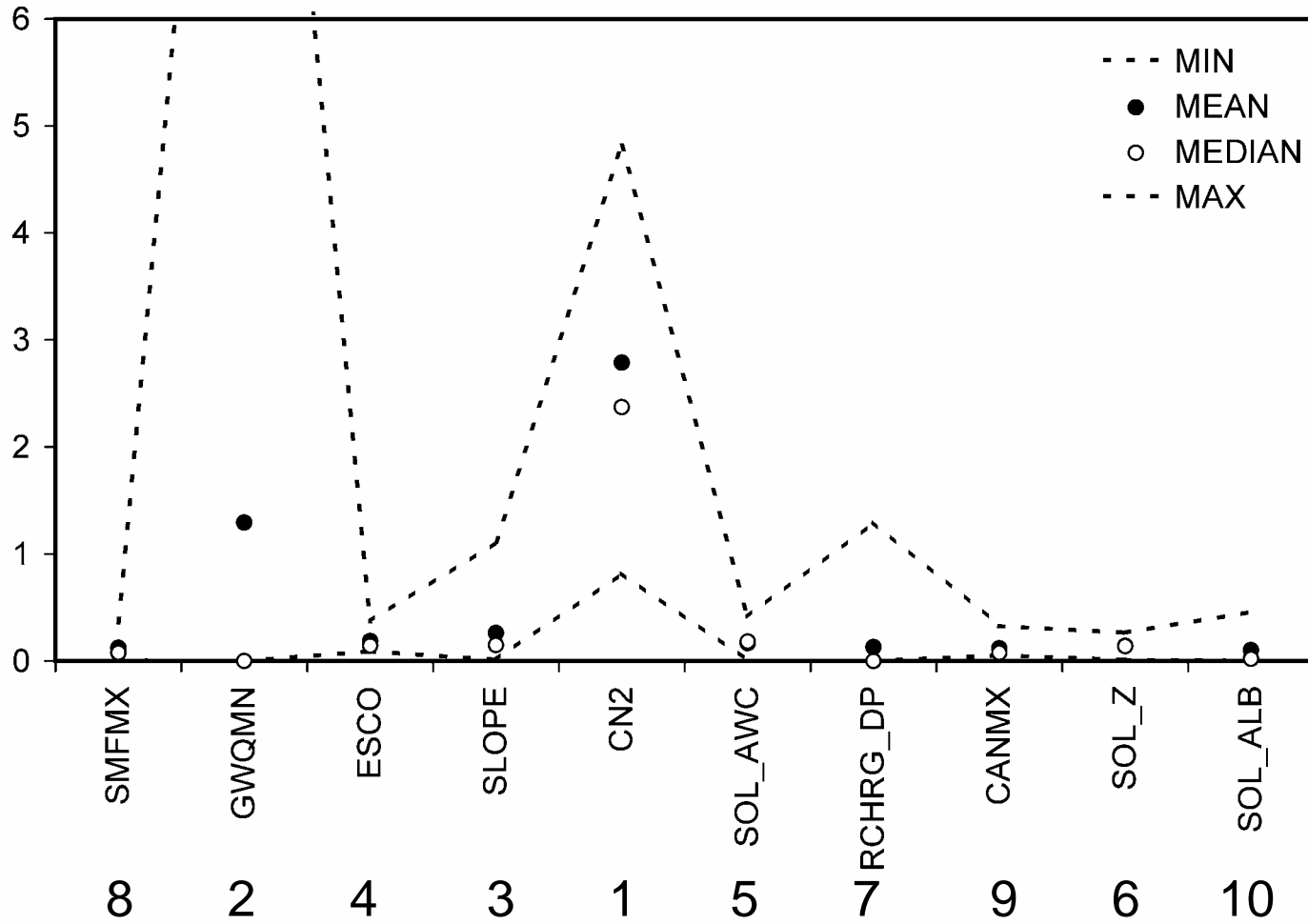
- Change at each Latin Hypercube point each parameter one by one
- $m$  sensitivity results: mean and variance
- Ranked parameters

Fohrer

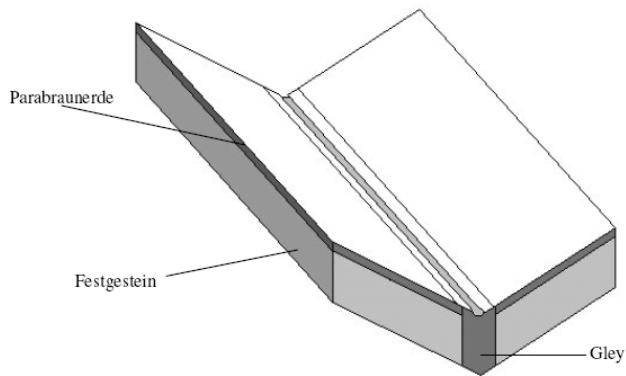
Dep. Hydrology & Water Resources Management, CAU Kiel



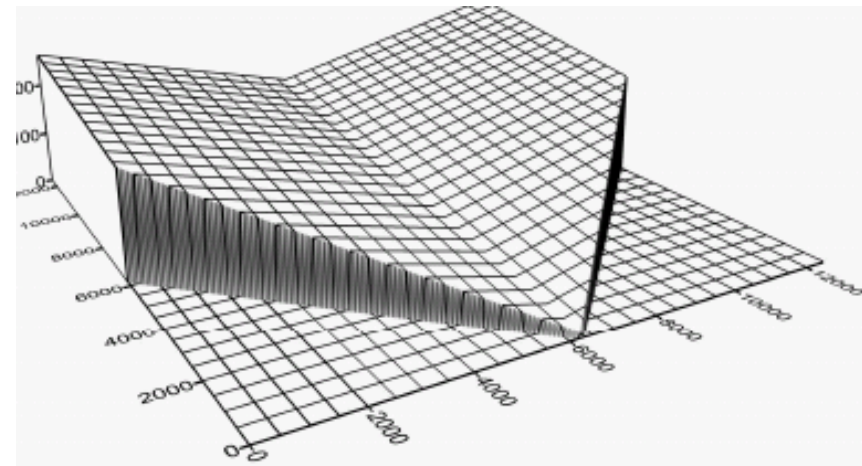
# LH-OAT



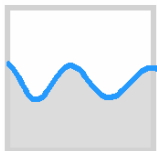
# Einsatz von künstlichen Einzugsgebieten



Lenhart et al., 2002



Horn et al., 2005



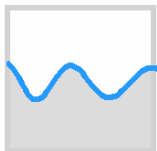
# **Wirkung von Eingangsdatenunsicherheit**

# Einfluss der Niederschlagsregionalisierung auf die Wasserhaushaltskomponenten

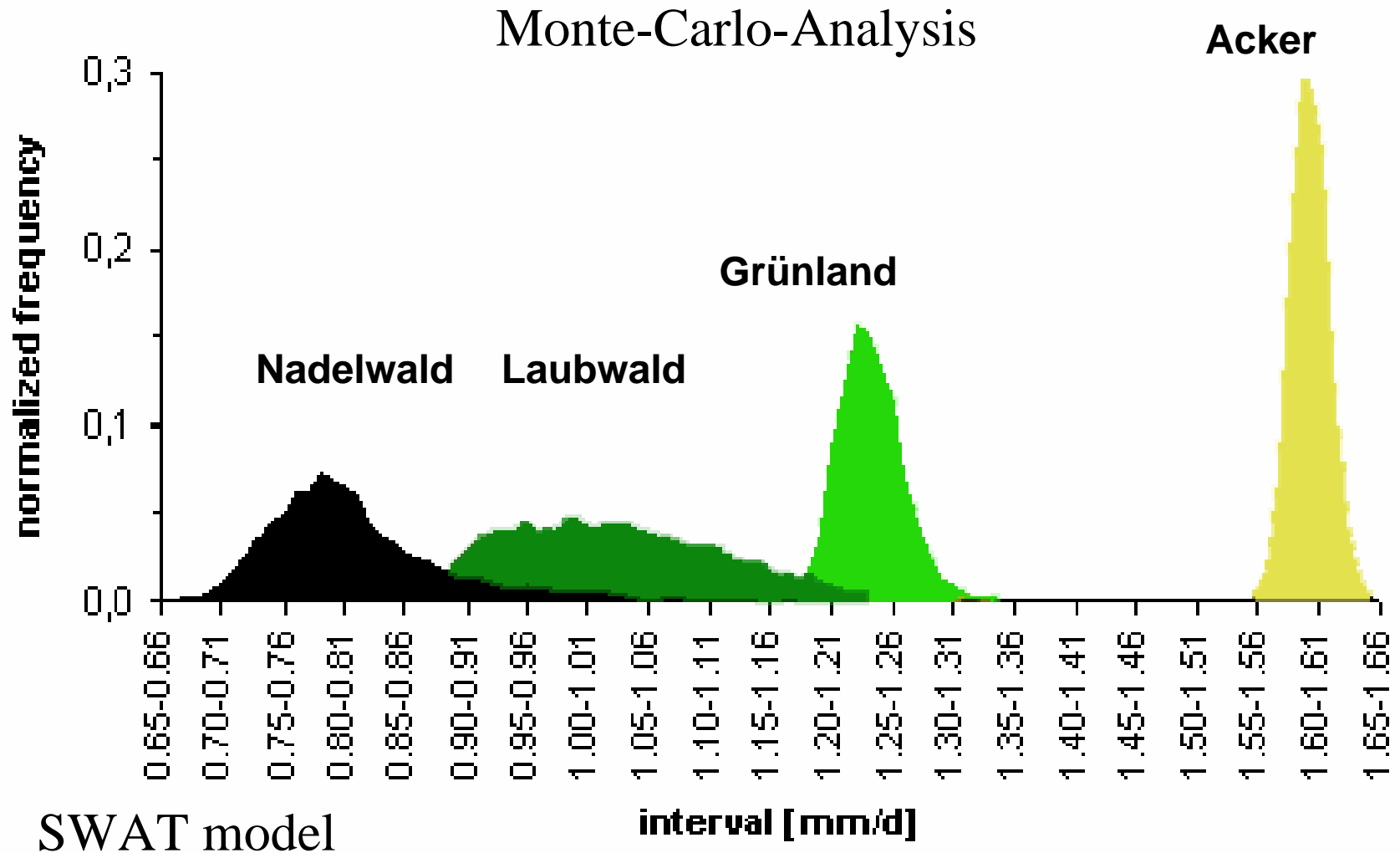
	N mm	Eta mm	Qsurf mm	Qlat mm	Qbase mm	GWR mm
Nearest neighbour	850	486	28	281	41	18
Inv. distance	888	492	32	291	48	29
Inv. Sq distance	877	490	31	288	44	27
Ordinary kriging	870	488	31	286	42	25

Modellierung mit SWAT, Dill-Einzugsgebiet

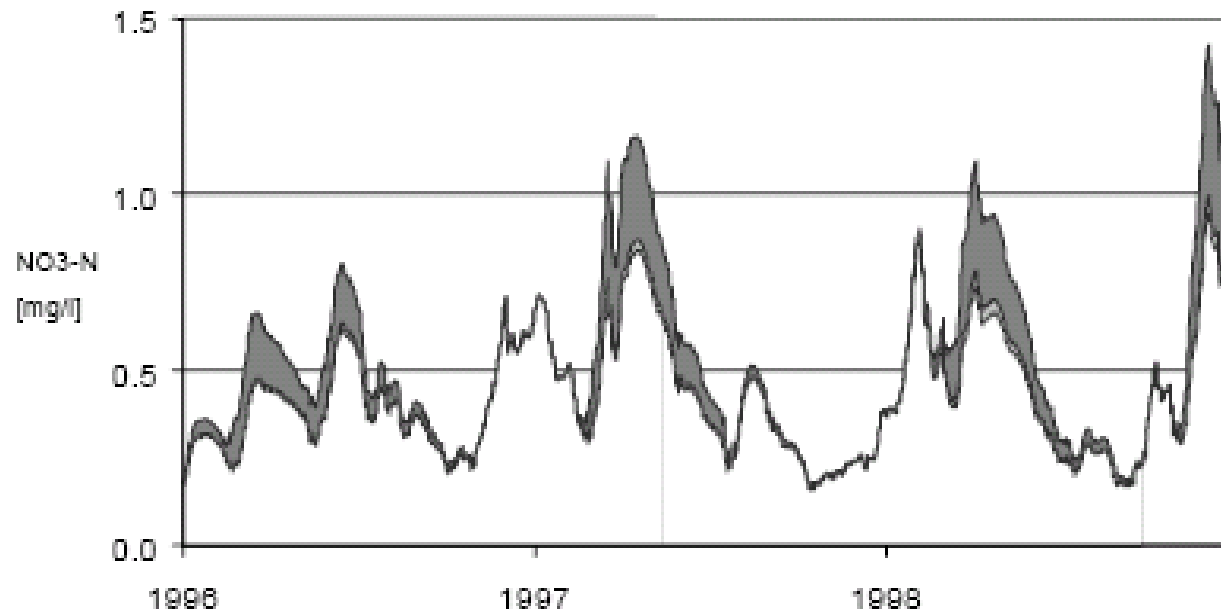
**Maletta et al., 2005**



# Unsicherheit in der Landnutzungsparametrisierung und die Auswirkung auf den Abfluss



# Wirkung der Unsicherheit im Minereraldüngungsniveau auf den Nitrataustrag



**Fig. 3.** Effect of different amounts of mineral nitrogen fertilisers on the daily nitrate concentration in the Nuthe for the time period 1996–1998. Middle line shows the reference case with 100 kgN/(ha\*a), and the dark/light grey shadowed areas indicate cases with increased/decreased amounts of fertilisers by 40%.

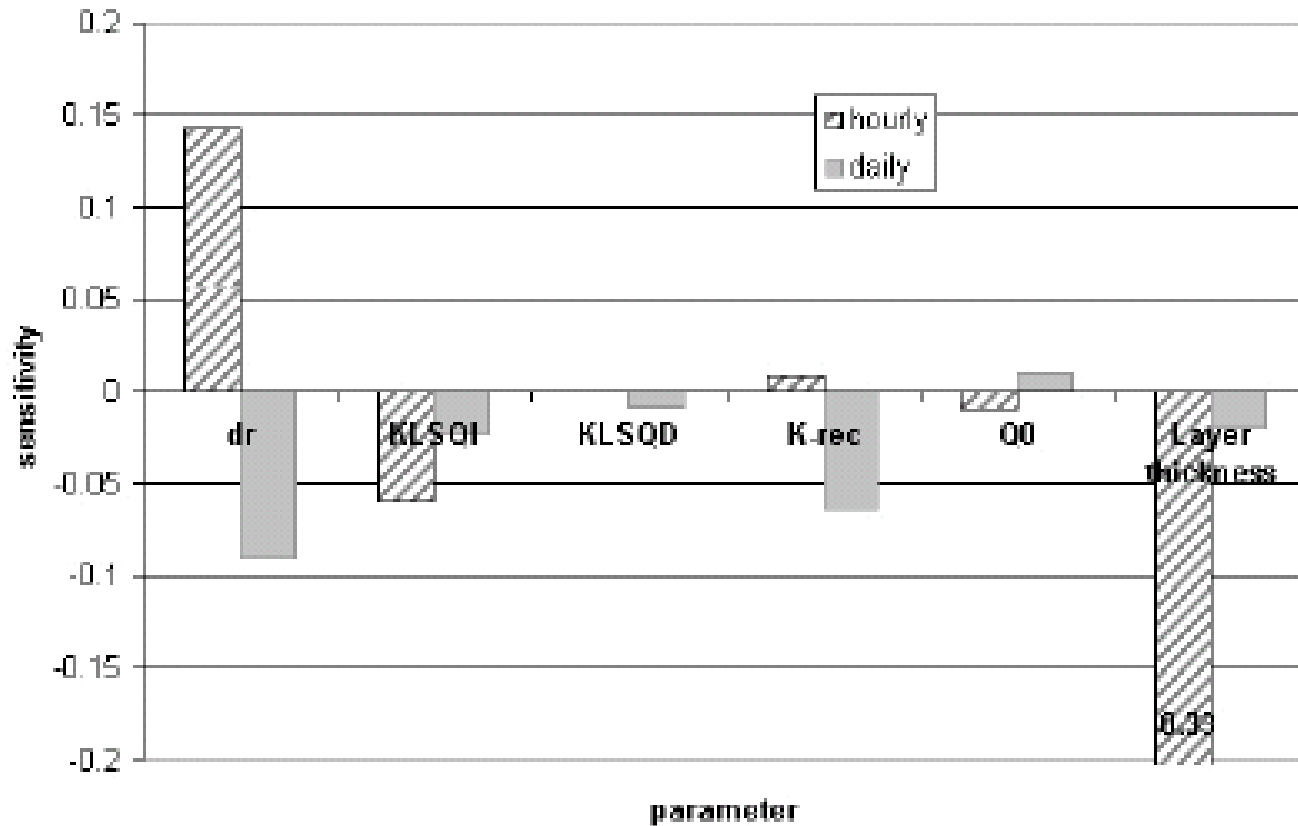
**Habeck et al., 2005**

Fohrer

Dep. Hydrology & Water Resources Management, CAU Kiel

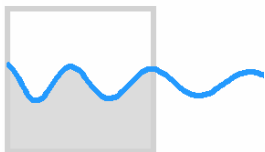
# **Einflussfaktoren auf die Sensitivität**

# Einfluss des Zeitschritts



WASIM-ETH

Fig. 3. Sensitivity measure (Eq. 3) for different modelling time steps.





# Einfluss der Rastergröße

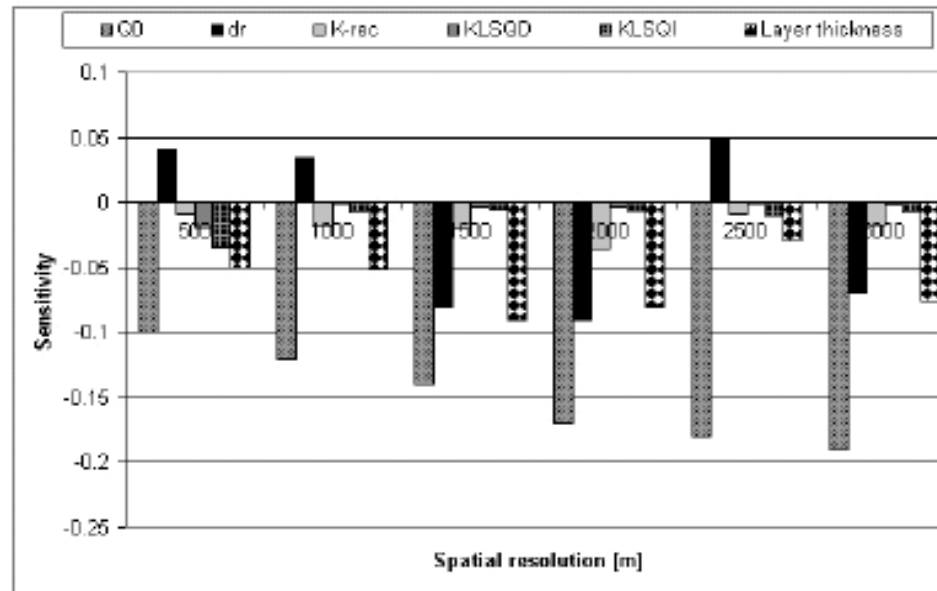
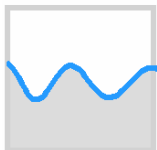


Fig. 4. Sensitivity measure  $S$  (Eq. 3) for selected model parameters on different grid resolutions.

WASIM-ETH



# Einfluss der Komplexität

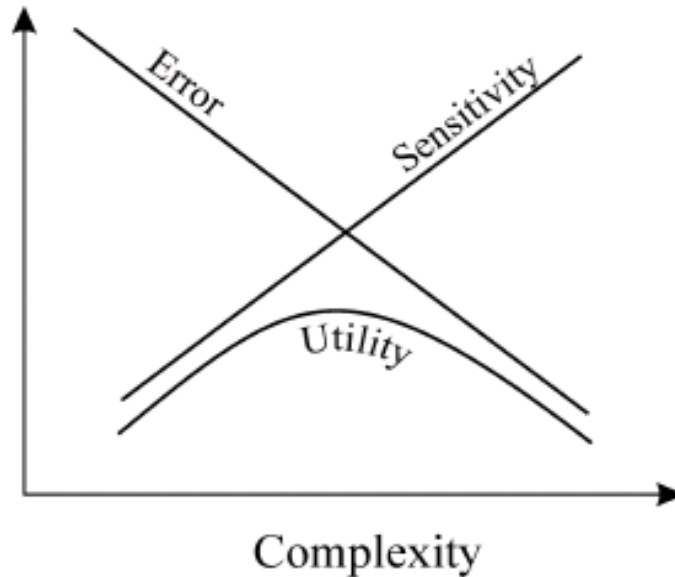
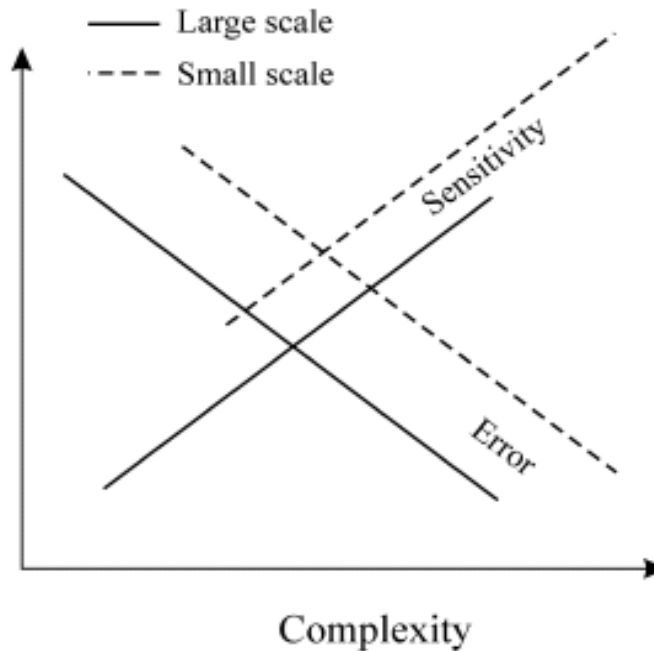



Fig. 3. Complexity versus the uncertainty components, sensitivity and error (adapted from Snowling and Kramer (2001) and Lindenschmidt et al. (accepted)).

# Skaleneinfluss



**Fig. 4.** The complexity vs. uncertainty relation shifts at different scales, as proposed by Lindenschmidt et al. (accepted).

**Lindenschmidt et al., 2005**

A scenic view of a river with a wooden boat in the foreground and trees in the background. The boat is partially visible in the lower-left corner, with an oar resting inside. The river flows towards the background, reflecting the sky and trees. The background shows a line of trees under a clear blue sky. The overall scene is peaceful and natural.

*Thank you for your attention!*  
*[nfohrer@hydrology.uni-kiel.de](mailto:nfohrer@hydrology.uni-kiel.de)*

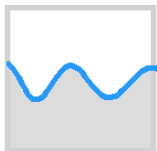
# Sensitivity analysis

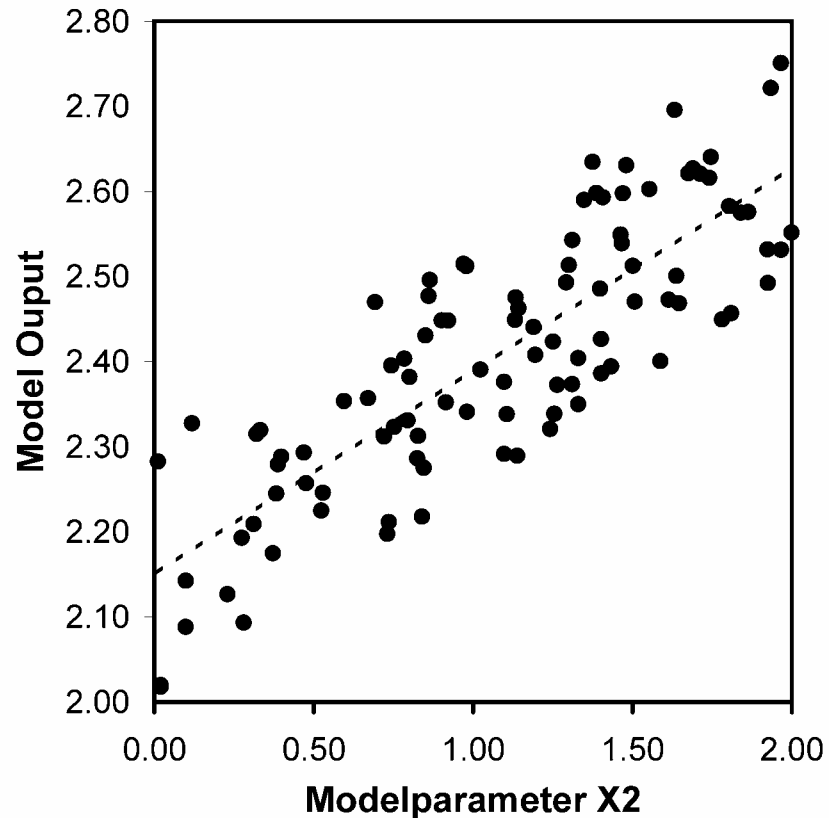
- **Definition:**

**Sensitivity analysis studies the “sensitivity” of the output of a system to changes in the parameters, input variables or initial conditions**

$$\frac{dy}{dt} = f(y, \theta) \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{S}(t) = \frac{\partial y(t)}{\partial(\theta)}$$

- **Local / global sensitivity**





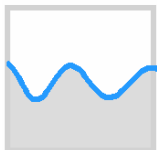
$$y(s) = \hat{\beta}_0 + \sum_{i=1}^p \hat{\beta}_i x_i(s) + \hat{e}(s)$$

$$ORC = \hat{\beta}_i$$

$$SRC = \hat{\beta}_i \frac{s_{x_i}}{s_y}$$

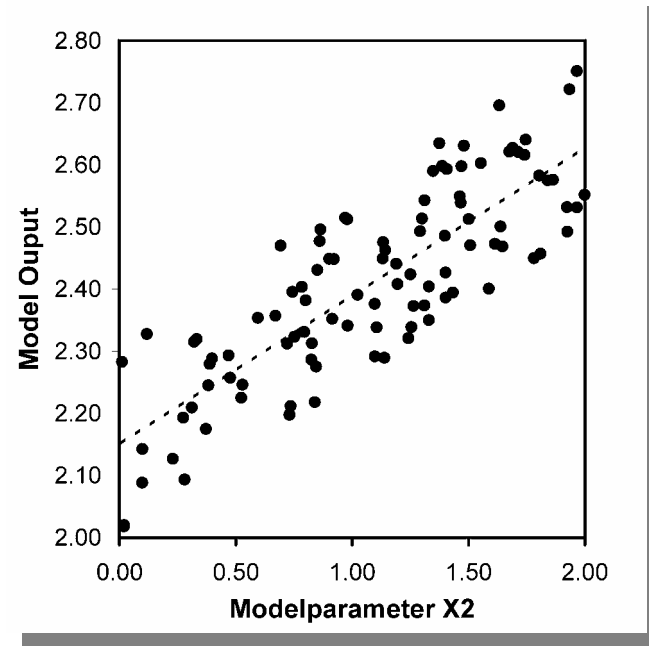
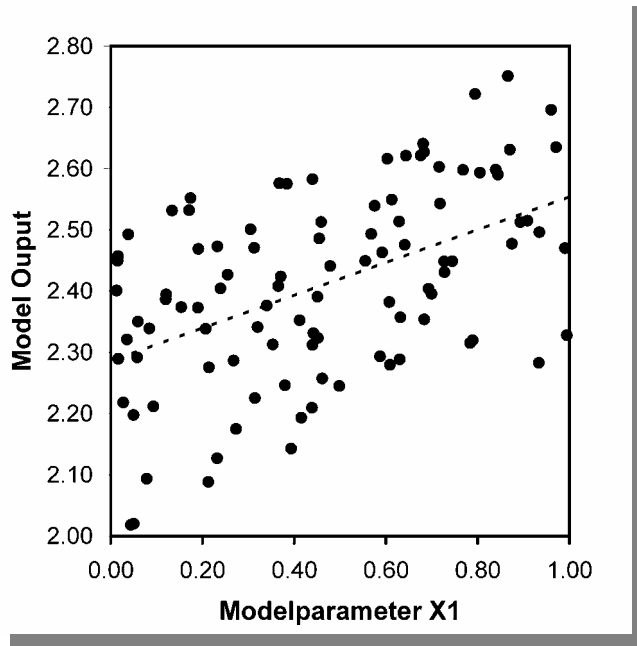
$$LCC = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{s_x s_y}$$

Also see Christiaens and Feyen (2002)



# Monte Carlo SA IV

Slide after Huisman, 2004



ORC	0.301	0.249
SRC	0.559	0.866
LCC	0.503	0.830

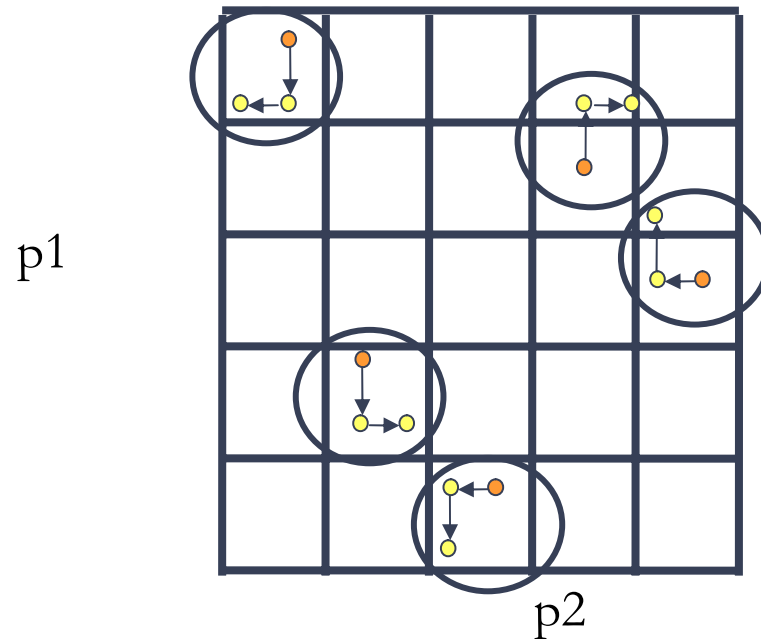
Fohrer

Dep. Hydrology & Water Resources Management, CAU Kiel

# Sensitivity Analysis using LH-OAT

## Latin Hypercube sampling

- divide parameter range in  $m$  intervals
- “Randomly” sample  $m$  points in a way that each interval has 1 point



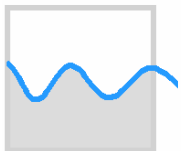
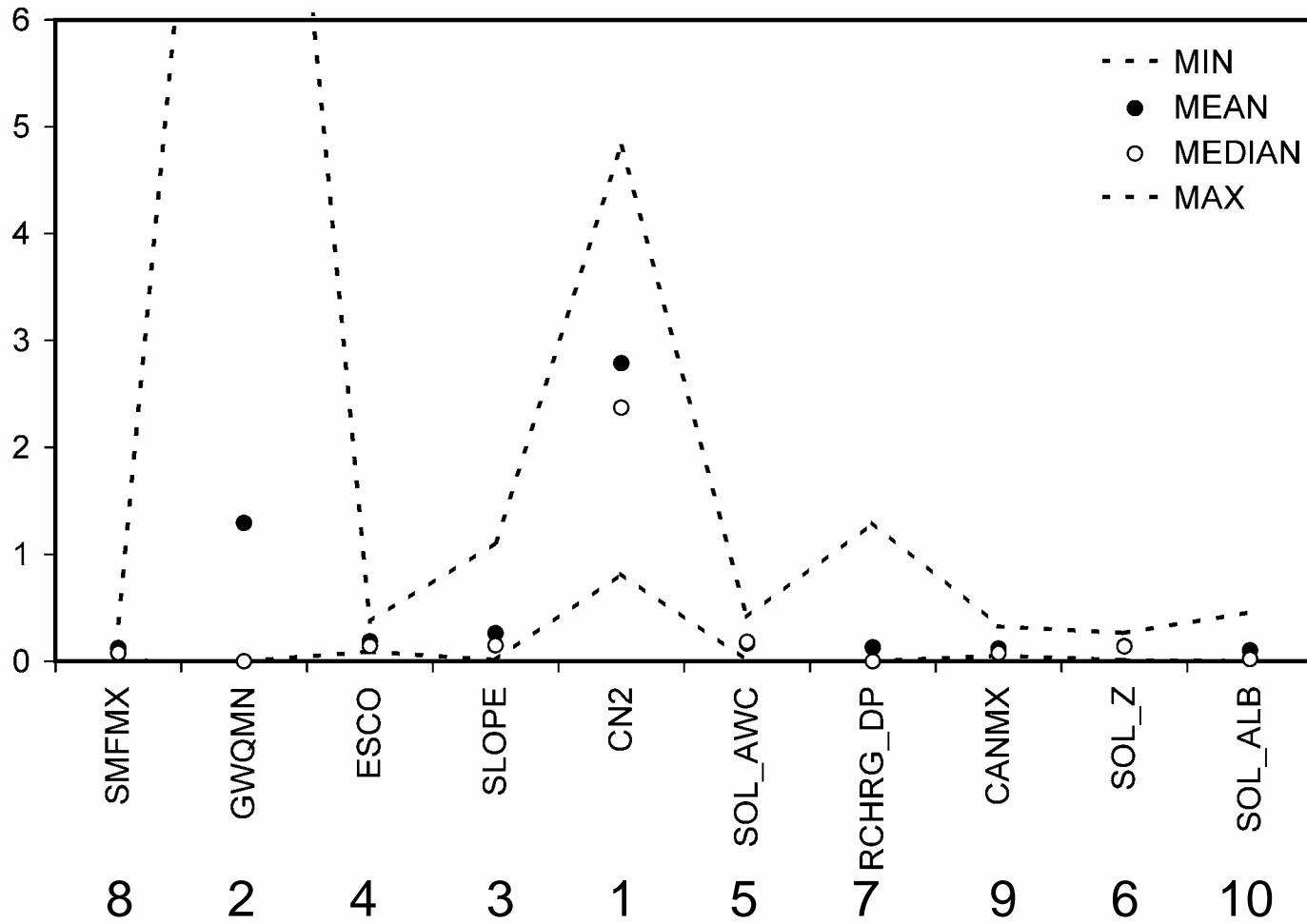
## One factor at a Time:

- Change at each Latin Hypercube point each parameter one by one
- $m$  sensitivity results: mean and variance
- Ranked parameters



# LH-OAT Sensitivity Analysis I

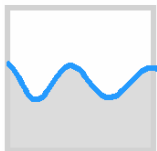
Slide after Huisman, 2004



# LH-OAT Sensitivity Analysis II

---

- The LHS-OAT sensitivity analysis combines the advantages of the OAT and the LHS sensitivity analysis:
  - Sensitivity is determined over the entire parameter space
  - Sensitivity clearly attributed to one model parameter
  - Computationally efficient
  - No assumptions on linearity in multiple regression
  - Parameter correlation can be included



# Quantifizierung der Auswirkung unsicherer Eingangsdaten

# Prediction uncertainty intervals

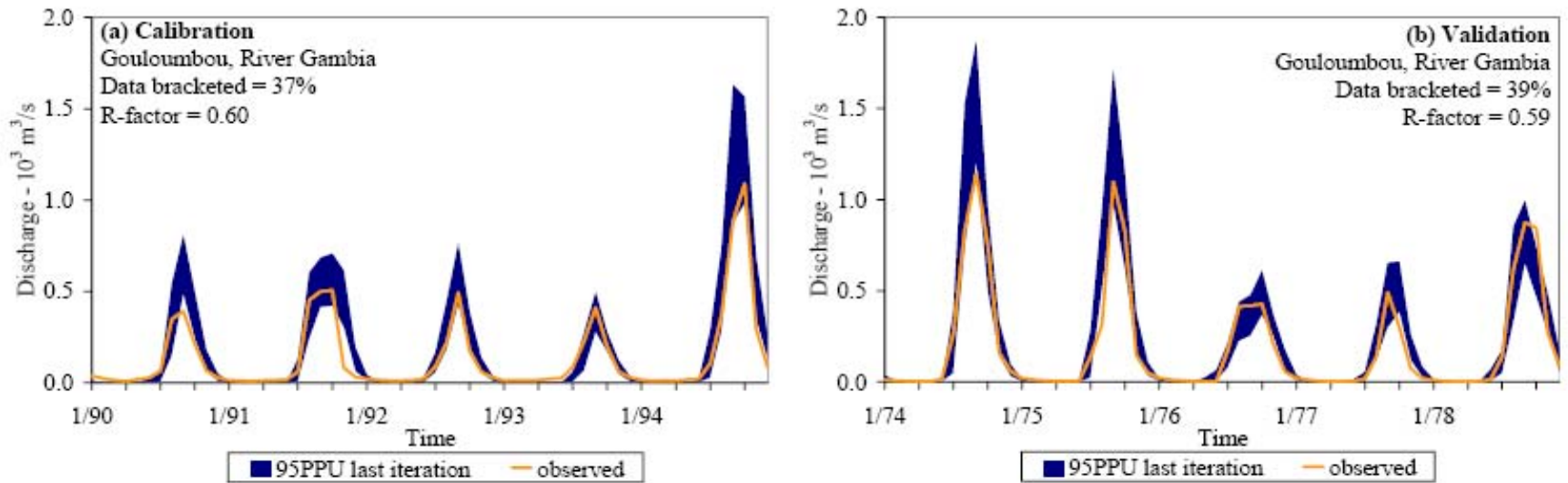
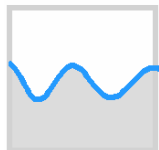


Fig. 4. Monthly calibration (a) and validation (b) results for Gouloumbou (River Gambia) showing the 95% prediction uncertainty intervals along with the measured discharge.

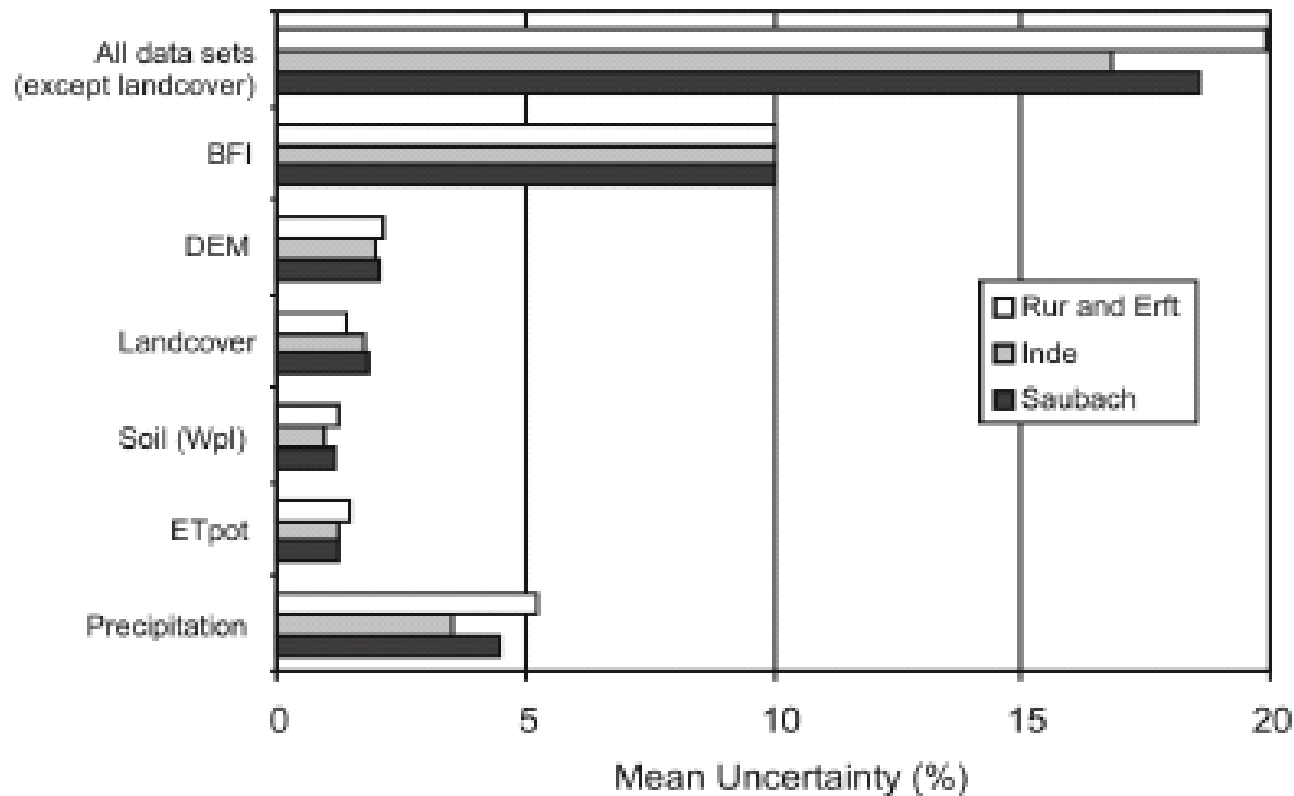


Schuol & Abbaspour, 2006

SWAT, SUFI-2-methodology  
Fohrer

Dep. Hydrology & Water Resources Management, CAU Kiel

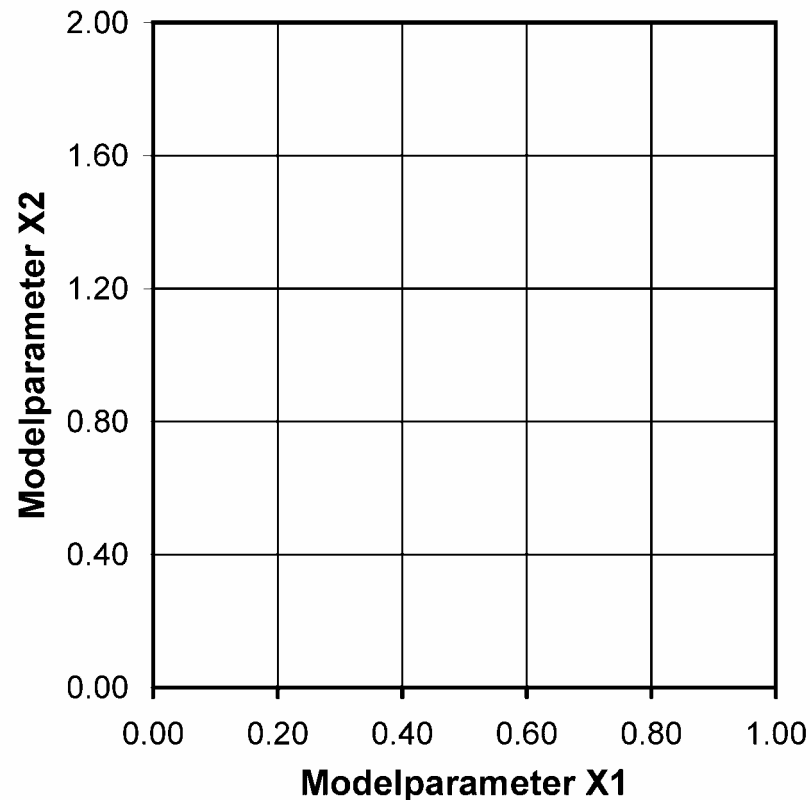
# Mittlere Unsicherheit in % einer Ausgabegröße



**Fig. 5.** The averaged uncertainties in percent of the mean groundwater recharge for the study areas as a result of the considered uncertainties of the data sets. **Bogena et al., 2005**

# Alternative: Latin Hypercube Sampling I

1. Teile den Parameterraum in N Teile mit gleicher Wahrscheinlichkeit  $1/N$

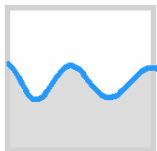


Slide after Huisman, 200

# Latin Hypercube Sampling III

---

3. Mehrfache Wiederholung der Schritte 1-2
4. Bestimme Sensitivität mittels multipler linearer Regression



Slide after Huisman, 2004

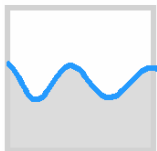
Fohrer

Dep. Hydrology & Water Resources Management, CAU Kiel

# Latin Hypercube Sampling III

---

- Vorteile:
  - Sensitivität ist über den gesamten Parameterraum bestimmt
  - Parameterkorrelation werden berücksichtigt
  - Rechenzeiteffizient
- Nachteile:
  - Annahme der Linearität in multiplen Regression
  - Sensitivität kann nicht klar einem bestimmten Parameter zugeordnet werden



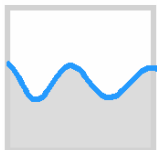
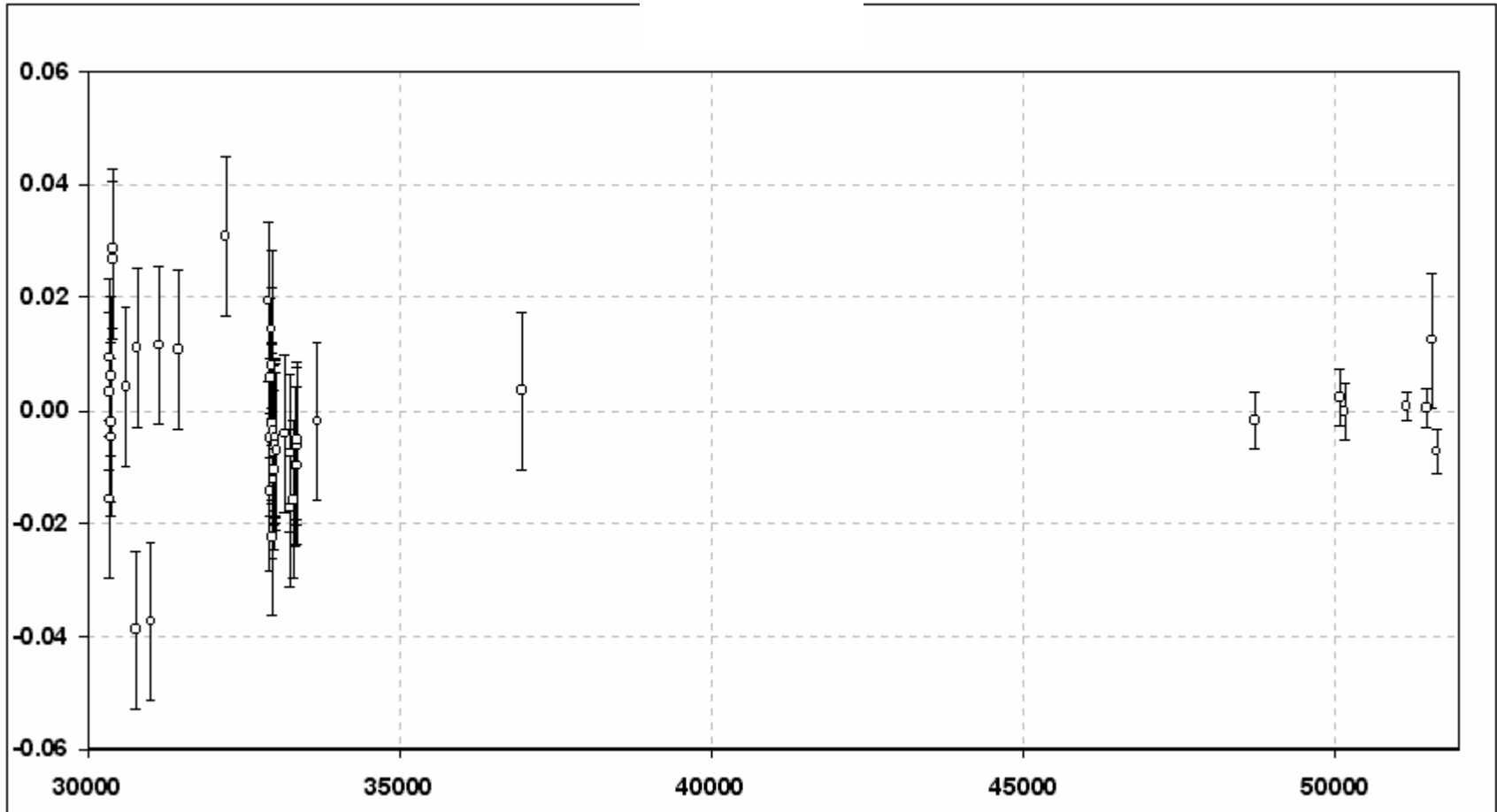
Slide after Huisman, 2004

Fohrer

Dep. Hydrology & Water Resources Management, CAU Kiel



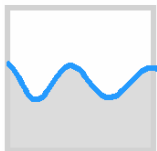
# Messunsicherheit



# Probleme bei der Kalibrierung

---

- Zu geringe Informationsgrundlage bei der Eichung (nur Abflussganglinie)
- Meist hoher Parametrisierungsgrad, eine Vielzahl von Parametern muss angepasst werden
- Sowohl Modellstruktur als auch Messungen beinhalten Fehler



# Problem: Effizienz der Beprobung des Parameterraums bei der Monte Carlo Analyse

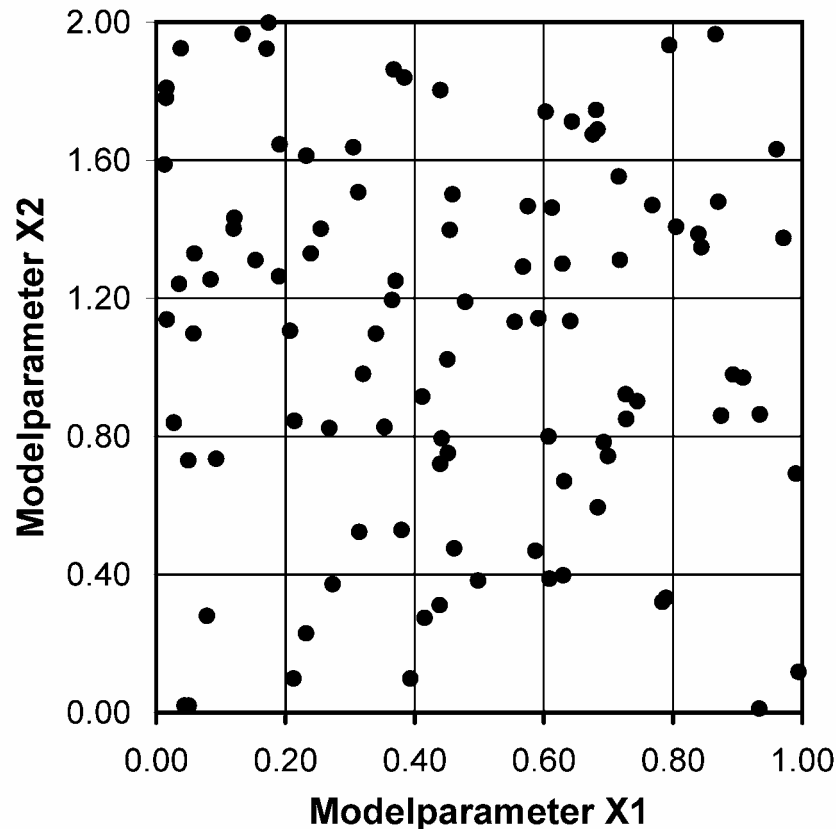
$$p = \frac{1}{N^m}$$

$$p_0 = \left(1 - \frac{1}{N^m}\right)^q$$

N = number of intervals

m = number of parameters

q = number of draws



<i>m</i>	<i>p</i> <sub>0</sub>
2	0.017
3	0.448
4	0.852

# Definitionen

---

- Sensitivitätsanalyse = Empfindlichkeitsanalyse
- Untersuchung der Auswirkung von Parametervariationen auf das Modellergebnis
- Untersucht Empfindlichkeit eines Ergebnisses auf Änderungen in den Prämissen
- Einfluss von Inputfaktoren auf Ergebnisgrößen

