Einführung in die Potentialtheorie
Sommersemester 2024
PD Dr. Sarah Eberle-Blick
M. Sc. Johannes Wagner

6. Übungsblatt (erschienen am 05.07.24)

Aufgabe 6.1 (Votieraufgabe)
Sei Σ eine reguläre Fläche und $P_1, P_2 : C^{(0)}(\Sigma) \to C^{(0)}(\Sigma)$ die Operatoren des Einfach- und Doppelschicht-Potentials, d.h. für $F \in C^{(0)}(\Sigma)$ gilt

$$P_1 F = \int_\Sigma \frac{1}{|\cdot - y|} F(y)\, d\omega(y),$$
$$P_2 F = \int_\Sigma \left(\frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{1}{|\cdot - y|} \right) F(y)\, d\omega(y).$$

Zeigen Sie, dass diese Operatoren beschränkt bzgl. der $L^2(\Sigma)$-Norm

$$\|F\|_{L^2(\Sigma)} = \left(\int_\Sigma |F(x)|^2 \, d\omega(x) \right)^{\frac{1}{2}}$$

sind.

Aufgabe 6.2 (Votieraufgabe)
Für $F \in C^{(0)}(\Sigma)$ gilt

$$\lim_{\tau \to 0} \|L_i^\pm(\tau) F\|_{C^{(0)}(\Sigma)} = 0, \qquad \lim_{\tau \to 0} \|L_i^\pm(\tau)^* F\|_{C^{(0)}(\Sigma)} = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$
$$\lim_{\tau \to 0} \|J_i(\tau) F\|_{C^{(0)}(\Sigma)} = 0, \qquad \lim_{\tau \to 0} \|J_i(\tau)^* F\|_{C^{(0)}(\Sigma)} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

wobei $L_i^\pm$ und J_i die Grenz- und Sprungoperatoren sind, so wie sie in der Vorlesung definiert werden. Zeigen Sie mit Hilfe der Funktionalanalysis, dass die genannten Relationen für den Hilbertraum $L^2(\Sigma)$ verallgemeinert werden können zu

$$\lim_{\tau \to 0} \|L_i^\pm(\tau) F\|_{L^2(\Sigma)} = 0, \qquad \lim_{\tau \to 0} \|L_i^\pm(\tau)^* F\|_{L^2(\Sigma)} = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$
$$\lim_{\tau \to 0} \|J_i(\tau) F\|_{L^2(\Sigma)} = 0, \qquad \lim_{\tau \to 0} \|J_i(\tau)^* F\|_{L^2(\Sigma)} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Aufgabe 6.3 (Votieraufgabe)
Beweisen Sie Theorem 6.11: Die homogene Integralgleichung

$$2\pi S - P^*|_\tau(0,0) S = 0$$

hat nur die triviale Lösung in $C^{(0)}(\Sigma)$.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.