Optimierung und inverse Probleme
Wintersemester 2024/25
Prof. Dr. Bastian von Harrach-Sammet
M. Sc. Andrej Brojatsch

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

12. Übungsblatt (erschienen am 1.7.2024)

Aufgabe 12.1 (Programmieraufgabe)[4,5 Punkte]

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $X := [l_1, u_1] \times \cdots \times [l_n, u_n]$, mit unteren Schranken $l_i \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und oberen Schranken $u_i \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, mit $l_i < u_i$, $i = 1, \ldots, n$. Wir betrachten das zugehörige Optimierungsproblem

$$\min_{x \in X} f(x).$$

Die Projektion auf X ist bei unserer Wahl von X gegeben durch $(\mathrm{Proj}_X[x])_i = \begin{cases} l_i, \text{ falls } x_i < l_i, \\ x_i, \text{ falls } x_i \in [l_i, u_i], \\ u_i, \text{ falls } x_i > u_i. \end{cases}$

Damit lässt sich das *Projizierte Gradientenverfahren* formulieren:

Algorithm 1 Projiziertes Gradientenverfahren

Gegeben: Startwert $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und Armijo-Parameter $\beta \in (0,1)$ und $\gamma \in (0,1)$
for $k = 0, 1, 2, \ldots$ **do**
  if $\|x_k - \mathrm{Proj}_X[x_k - \nabla f(x_k)]\| = 0$ **then**
    STOP
  else
    $s_k := \frac{1}{\beta}$
    repeat
      $s_k := \beta s_k$
      $x_{k+1} := \mathrm{Proj}_X[x_k - s_k \nabla f(x_k)]$
    until $f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - \gamma \nabla f(x_k)^\intercal (x_k - x_{k+1})$
  end if
end for
return $x_0, x_1, x_2, \ldots$

Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

```
function [fz,z] = Proj_Grad(f,grad_f,z0,β,γ)
```

welche Algorithmus 1 realisiert und testen Sie die Funktion am Beispiel $f(x,y) = x^2 + 100y^2$, $X = [-2,-1] \times [-2,2]$, sowie $z_0 = (10,1)$, $\beta = 0.5$ und $\gamma = 0.01$ (mit Abbruchstoleranz 10^{-6}). Plotten Sie die Höhenlinien der Funktion und den zulässigen Bereich zusammen mit der Folge der Iterierten (als Polygonzug).

Aufgabe 12.2 (schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]

Beweisen Sie Beispiel 3.22 (c) und Beispiel 3.26 der Vorlesung:

(a) Sei die Menge $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}^n$ und $x \in X$ ein Häufungspunkt von X, dann ist $T(X,x) \neq \emptyset$.

(b) Die Menge

$$X = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \; -1 \leq x_1 \leq 1,\; x_2 = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \; (x_1+1)^3 \geq x_2,\; x_1 \leq 1,\; x_2 = 0\}$$

lässt sich beschreiben durch

$$g(x) = \begin{pmatrix} -x_1 - 1 \\ x_1 - 1 \end{pmatrix}, \quad h(x) = x_2$$

aber auch durch

$$\tilde{g}(x) = \begin{pmatrix} x_2 - (x_1+1)^3 \\ x_1 - 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{h}(x) = x_2.$$

Zeigen Sie, dass für $\bar{x} = (-1, 0)^\mathsf{T} \in X$ gilt

$$T(X, \bar{x}) = T_l(g, h, \bar{x}) \subsetneq T_l(\tilde{g}, \tilde{h}, \bar{x}),$$

und stellen Sie den Sachverhalt grafisch dar.

Aufgabe 12.3 (Votieraufgabe)
Zeigen Sie Beispiel 3.29 (b) der Vorlesung: Die Forderung

$$g_i \text{ ist konkav für alle } i \notin I_x,\; h \text{ ist affin linear.}$$

ist eine Constraint Qualification. Dabei nennen wir eine Funktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ affin linear, wenn Sie sich schreiben lässt als $h(x) = Ax + b$, mit $A \in \mathbb{R}^{p \times n},\; b \in \mathbb{R}^p$ und eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konkav, falls $f((1-\lambda)x + \lambda y) \geq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y),\; \forall x, y \in \mathbb{R}^n,\; \lambda \in [0, 1]$ gilt.
Hinweis: Verwenden Sie Satz 2.16.

Aufgabe 12.4 (Votieraufgabe)
Zeigen Sie Folgerung 3.35 der Vorlesung: Für $A \in \mathbb{R}^{n \times m},\; B \in \mathbb{R}^{n \times p},\; c \in \mathbb{R}^n$ gegeben sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) Für alle $d \in \mathbb{R}^n$ mit $A^\mathsf{T} d \leq 0$ und $B^\mathsf{T} d = 0$ gilt $c^\mathsf{T} d \leq 0$.

(ii) Es gibt $u \in \mathbb{R}^m$ mit $u \geq 0$ und $v \in \mathbb{R}^p$ mit $c = Au + Bv$.

Aufgabe 12.5 (Multiple Choise)[1,5 Punkte]
Betrachten Sie das Optimierungsproblem

$$\min f(x) := -x_1 \quad \text{u.d.N.} \quad (x_1 - 1)^2 \leq x_2, \quad x_1^2 + x_2^2 = 1. \tag{1}$$

(a) In $\hat{x} = (1, 0)$ gilt eine Constraint Qualification. wahr ☐ falsch ☐

(b) $(\hat{x}, \lambda) = \big((1, 0), (1/2, 1)\big)$ ist ein KKT-Punkt. wahr ☐ falsch ☐

(c) $\hat{x} = (1, 0)$ ist globales Minimum von (1). wahr ☐ falsch ☐

- Zu den **schriftlichen Aufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 8.7.2024 um 10 Uhr in Fach 17 im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist.

- Zu **Programmieraufgaben*** ist ein kommentierter `MATLAB`-Quellcode zu schreiben, welcher zusammen mit den damit erstellten Plots ausgedruckt werden soll. Der Code ist nicht per Mail einzureichen.

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

- Zu **Multiple Choice Aufgaben** soll die Lösung auf diesem Übungsblatt angekreuzt werden. Geben Sie das Blatt versehen mit ihrem Namen zusammen mit der schriftlichen Abgabe ab. **Eine Begründung oder Ausarbeitung wird nicht verlangt**. Es gibt jeweils $+0.5$ Punkte für richtig angekreuzte Antworten und -0.5 Punkt für jedes falsch gesetzte Kreuz. Die Mindestpunktzahl von 0 Punkten kann nicht unterschritten werden.

***Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.**