Optimierung und inverse Probleme
Wintersemester 2024/25
Prof. Dr. Bastian von Harrach-Sammet
M. Sc. Andrej Brojatsch

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Lösungsvorschlag Programmieraufgabe

Aufgabe 8.4 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]
Betrachten Sie die in Aufgabe 1.4 implementierte Funktion Inhalt, welche für einen Vektor $U \in \mathbb{R}^N$ mit $N = n^2, n \in \mathbb{N}$ den Flächeninhalt des Graphen der stetigen und auf jedem Dreieck linearen Funktion u mit $u(x_{i+(j-1)n}) = U_{i+(j-1)n},\ i,j = 1,...,n$ berechnet, wobei die $x_{i+(j-1)n}$ wie in Aufgabe 1.4 gegeben sind. Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

```
function [gradA] = Gradient_Inhalt(U,n)
```

zur (exakten) Bestimmung des Gradienten von Inhalt. Testen Sie Ihre Funktion für

$$n = 3 \qquad \text{und} \qquad U = [1,2,3,2,3,4,3,4,5].$$

Lösungsvorschlag::

Ein Knoten x_i ist Ecke von bis zu 6 Dreiecken (für innere Knoten, an den Rändern und Ecken entsprechend weniger), welche durch x_i und die waagerechten, senkrechten und diagonale (rechtsoben und linksunten) benachbarten Knoten aufgespannt werden (im Code als westlich, nördlich, nordöstlich, östlich, südlich und südewstlicher Index bezeichnet). Die Ableitung nach u_i ergibt sich dann durch die Summe der Ableitungen der Flächeninhalte der bis zu 6 Dreiecke. Betrachten wir als Beispiel das durch x_i, x_{i+1} und x_{i+n+1} aufgespannte Dreieck (also von x_i ausgesehen das Dreieck TermON im Code). Der Flächeninhalt dieses Dreiecks ist

$$\begin{aligned}
2I &= \left\| \begin{pmatrix} x_{i+n+1,1} - x_{i,1} \\ x_{i+n+1,2} - x_{i,2} \\ u_{i+n+1} - u_i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_{i+1,1} - x_{i,1} \\ x_{i+1,2} - x_{i,2} \\ u_{i+1} - u_i \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} h \\ h \\ u_{i+n+1} - u_i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ u_{i+1} - u_i \end{pmatrix} \right\| \\
&= \left\| \begin{pmatrix} h(u_{i+1} - u_i) \\ h(u_{i+n+1} - u_i) - h(u_{i+1} - u_i) \\ -h^2 \end{pmatrix} \right\| = h\sqrt{(u_{i+1} - u_i)^2 + (u_{i+n+1} - u_{i+1})^2 + h^2} \\
\Rightarrow \frac{\partial}{\partial u_i} I &= -\frac{h}{2} \frac{u_{i+1} - u_i}{\sqrt{(u_{i+n+1} - u_i)^2 + (u_{i+n+1} - u_{i+1})^2 + h^2}}
\end{aligned}$$

Für die Beiträge der übrigen Dreiecke ergeben sich ähnliche Ausdrücke, siehe Code.