

11. Übungsblatt (erschienen am 24.6.2024)

Aufgabe 11.1 (Schriftliche Aufgabe)[4,5 Punkte]

Zu einem linearen Problem mit Nebenbedingungen $Ax = b \geq 0$ und $x \geq 0$ betrachte das Ersatzproblem

$$\text{Minimiere} \quad (0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \quad \dots \quad 1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

unter den Nebenbedingungen

$$(A \quad I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0,$$

wobei $y \in \mathbb{R}^m$ und $I \in \mathbb{R}^{m \times m}$ die Einheitsmatrix ist. Zeigen Sie:

- (a) Für das Ersatzproblem ist $\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ ein Basisvektor.
- (b) Ist der zulässige Bereich des ursprünglichen Problems nicht leer, so hat jede optimale Ecke des Ersatzproblems die Form $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, wobei x eine Ecke des ursprünglichen Problems ist.
- (c) Ist der zulässige Bereich des ursprünglichen Problems leer, so existiert keine optimale Ecke des Ersatzproblems oder diese besitzt nicht die Form $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 11.2 (Multiple Choice)[1,5 Punkte]

Gegeben Sei $K = \{x \in \mathbb{R}^7 \mid Ax = b, x \geq 0\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 7}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Kreuzen Sie an, bei welchem der folgenden Vektoren es sich um einen Basisvektor von K handelt.

- | | |
|-------------------------------------|---|
| $x_1 = (2, 1, 3, -2, 0, 0, 0)^\top$ | wahr <input type="checkbox"/> falsch <input type="checkbox"/> |
| $x_2 = (1, 0, 3, 0, 1, 0, 0)^\top$ | wahr <input type="checkbox"/> falsch <input type="checkbox"/> |
| $x_3 = (1, 0, 3, 0, 3, 1, 0)^\top$ | wahr <input type="checkbox"/> falsch <input type="checkbox"/> |
| $x_4 = (0, 0, 2, 2, 1, 0, 3)^\top$ | wahr <input type="checkbox"/> falsch <input type="checkbox"/> |
| $x_5 = (2, 1, 1, 0, 2, 0, 2)^\top$ | wahr <input type="checkbox"/> falsch <input type="checkbox"/> |

Aufgabe 11.3 (Votieraufgabe)

Seien zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ und $\mu \in \mathbb{R}^p$ gegeben und definiere

$$L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}, \quad L(x, \mu) := f(x) + \mu^\top h(x).$$

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$F(x, \mu) := \begin{pmatrix} \nabla_x L(x, \mu) \\ h(x) \end{pmatrix}$$

stetig differenzierbar ist mit

$$F'(x, \mu) = \begin{pmatrix} \nabla_{xx}^2 L(x, \mu) & \nabla h(x) \\ \nabla h(x)^\top & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 11.4 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]

(a) Implementieren Sie das Simplex-Verfahren (Algorithmus 11)

```
function x=Simplex(A,b,c,B0),
```

wobei B_0 eine vorgegebene Startecke ist. Testen Sie Ihr Verfahren für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

und geben Sie die Lösung im Quellcode an.

(b) Bestimmen Sie die optimale Spielstrategie (im Sinne von Abschnitt 3.1.2) für ein Schere/Stein/Papier-Spiel, bei dem ein Spieler vom anderen einen Euro erhält, wenn er mit Stein oder Papier gewinnt, und sogar zwei Euro, wenn er mit Schere gewinnt.

Hinweis: Finden Sie ein äquivalentes lineares Optimierungsproblem (analog Abschnitt 3.1.2) und lösen sie dieses numerisch.

- Zu den **schriftlichen Aufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 1.7.2024 um 10 Uhr in Fach 17 im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist.
- Zu **Programmieraufgaben*** ist ein kommentierter **MATLAB**-Quellcode zu schreiben, welcher zusammen mit den damit erstellten Plots ausgedruckt werden soll. Der Code ist nicht per Mail einzureichen.
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.
- Zu **Multiple Choice Aufgaben** soll die Lösung auf diesem Übungsblatt angekreuzt werden. Geben Sie das Blatt versehen mit ihrem Namen zusammen mit der schriftlichen Abgabe ab. **Eine Begründung oder Ausarbeitung wird nicht verlangt**. Es gibt jeweils +0.5 Punkte für richtig angekreuzte Antworten und −0.5 Punkt für jedes falsch gesetzte Kreuz. Die Mindestpunktzahl von 0 Punkten kann nicht unterschritten werden.

*Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.