Einführung in die Potentialtheorie
Sommersemester 2024
PD Dr. Sarah Eberle-Blick
M. Sc. Johannes Wagner

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

5. Übungsblatt (erschienen am 14.06.2024)

Aufgabe 5.1 (Votieraufgabe)

Sei $0 < a < 1$, dann definieren wir für $h \in [-a, a]$ und $t \in [-1, 1]$

$$\Phi(h) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) h^n. \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Reihe (1) absolut und gleichmäßig bezüglich t und h konvergiert.

(b) Beweisen Sie, dass Φ die folgende Differentialgleichung erfüllt:

$$(1 + h^2 - 2ht)\Phi'(h) = (t - h)\Phi(h).$$

(c) Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{\sqrt{1 + h^2 - 2ht}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) h^n$$

für alle $t \in [-1, 1]$ und $h \in (-1, 1)$.

Aufgabe 5.2 (Schriftliche Aufgabe)

Zeigen Sie, dass jedes homogene, harmonische Polynom $H_n : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit Höchstgrad $n \in \mathbb{N}$, geschrieben werden kann als

$$H_n(x_1, x_2, x_3) = \sum_{j=0}^{n} x_3^j A_{n-j}(x_1, x_2)$$

mit $A_{n-j} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $j = 0, \ldots, n$, ist ein homogenes Polynom vom Grad $n - j$, das folgende Rekursionsrelation erfüllt

$$A_{n-j}(x_1, x_2) = -\frac{1}{j(j-1)} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)^2 \right) A_{n-j+2}(x_1, x_2)$$

für $j = 2, \ldots, n$.

Aufgabe 5.3 (Votieraufgabe)
Verwenden Sie Aufgabe 5.2 um zu beweisen, dass

$$\dim\big(\mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^3)\big) = 2n + 1.$$

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** kann eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden. Die Abgabe soll bis zum 28.06.2024 um 12:00 Uhr in Fach 17 in der Robert-Mayer Straße 6-8 erfolgen. Es darf in Zweiergruppen abgegeben werden.
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.