Optimierung und inverse Probleme
Wintersemester 2024/25
Prof. Dr. Bastian von Harrach-Sammet
M. Sc. Andrej Brojatsch

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

8. Übungsblatt (erschienen am 3.7.2024)

Aufgabe 8.1 (Schriftliche Aufgabe)[5 Punkte]
In der Vorlesung in Abschnitt 2.4.5 wurde folgende Methode zur Bestimmung der Matrizen H_k vorgestellt:

Beginnend mit einer symmetrischen Startmatrix $H_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ wähle die weiteren Matrizen durch *Aufdatierung als symmetrische Rang-1-Modifikation*

$$H_{k+1} = H_k + \gamma_k u_k u_k^\intercal,$$

wobei $\gamma_k \in \mathbb{R}$ und $u_k \in \mathbb{R}^n$ so zu bestimmen sind, dass H_{k+1} die Quasi-Newton-Bedingung (2.18) erfüllt. Sei außerdem $y_k := \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$ und $d_k := x_{k+1} - x_k$. Zeigen Sie: Mit der Bedingung $(y_k - H_k d_k)^\intercal d_k \neq 0$ ergibt sich in **eindeutiger** Weise die **Symmetrisch-Rang-1-Aufdatierungsformel** (SR1)

$$H_{k+1} = H_k + \frac{(y_k - H_k d_k)(y_k - H_k d_k)^\intercal}{(y_k - H_k d_k)^\intercal d_k}.$$

Aufgabe 8.2 (Votieraufgabe)
Zu einem Quasi-Newton-Verfahren sei die **Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno-Aufdatierungsformel** (BFGS-Formel)

$$H_{k+1} := H_k + \frac{y_k y_k^\intercal}{y_k^\intercal d_k} - \frac{H_k d_k d_k^\intercal H_k^\intercal}{d_k^\intercal H_k d_k}$$

gegeben, wobei wieder $y_k := \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$ und $d_k := x_{k+1} - x_k$ gilt und die Startmatrix $H_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch ist. Zeigen Sie:

(a) Mit den Bedingungen $y_k^\intercal d_k \neq 0$ und $d_k^\intercal H_k d_k \neq 0$ erfüllen die BFGS-Matrizen H_k die Quasi-Newton-Bedingung (2.18).

(b) Gilt $y_k^\intercal d_k > 0$ und ist H_k positiv definit, so ist auch H_{k+1} positiv definit.

(c) Seien $B_k := H_k^{-1}$ die Inversen der BFGS-Matrizen und sei wieder $y_k^\intercal d_k > 0$ und ist H_k positiv definit. Rechnen Sie mittels Lemma 2.57 die Aufdatierungsformel

$$B_{k+1} := B_k + \frac{(d_k - B_k y_k) d_k^\intercal + d_k (d_k - B_k y_k)^\intercal}{d_k^\intercal y_k} - \frac{(d_k - B_k y_k)^\intercal y_k}{(d_k^\intercal y_k)^2} d_k d_k^\intercal$$

für die Inversen nach.
Hinweis: Die BFGS-Matrizen entstehen durch symmetrische Rang-2-Aufdatierungen der Form

$$H_{k+1} = H_k + \gamma_1 u_{k,1} u_{k,1}^\intercal + \gamma_2 u_{k,2} u_{k,2}^\intercal.$$

Aufgabe 8.3 (Multiple Choice)[1 Punkte]
In dieser Aufgabe sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und $H_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(a) Ist H_k positiv definit, so ist $d_k = -H_k^{-1}\nabla f(x_k)$ eine Abstiegsrichtung. wahr ☐ falsch ☐

(b) Gilt $\|\nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k) - \nabla^2 f(x_k)(x_{k+1}-x_k)\| = o(\|x_{k+1}-x_k\|)$ so sind äquivalent:

   (i) $\|\nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k) - H_k(x_{k+1}-x_k)\| = o(\|x_{k+1}-x_k\|)$.
   (ii) $\|(\nabla^2 f(x_k) - H_k)(x_{k+1}-x_k)\| = o(\|x_{k+1}-x_k\|)$. wahr ☐ falsch ☐

Aufgabe 8.4 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]
Betrachten Sie die in Aufgabe 1.4 implementierte Funktion `Inhalt`, welche für einen Vektor $U \in \mathbb{R}^N$ mit $N = n^2, n \in \mathbb{N}$ den Flächeninhalt des Graphen der stetigen und auf jedem Dreieck linearen Funktion u mit $u(x_{i+(j-1)n}) = U_{i+(j-1)n},\ i,j = 1,...,n$ berechnet, wobei die $x_{i+(j-1)n}$ wie in Aufgabe 1.4 gegeben sind. Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

```
function [gradA] = Gradient_Inhalt(U,n)
```

zur (exakten) Bestimmung des Gradienten von `Inhalt`. Testen Sie Ihre Funktion für

$$n = 3 \qquad \text{und} \qquad U = [1,2,3,2,3,4,3,4,5].$$

- Zu den **schriftlichen Aufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 10.7.2024um 10 Uhr in Fach 17 im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist.

- Zu **Programmieraufgaben*** ist ein kommentierter `MATLAB`-Quellcode zu schreiben, welcher zusammen mit den damit erstellten Plots ausgedruckt werden soll. Der Code ist nicht per Mail einzureichen.

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

- Zu **Multiple Choice Aufgaben** soll die Lösung auf diesem Übungsblatt angekreuzt werden. Geben Sie das Blatt versehen mit ihrem Namen zusammen mit der schriftlichen Abgabe ab. **Eine Begründung oder Ausarbeitung wird nicht verlangt**. Es gibt jeweils $+0.5$ Punkte für richtig angekreuzte Antworten und -0.5 Punkt für jedes falsch gesetzte Kreuz. Die Mindestpunktzahl von 0 Punkten kann nicht unterschritten werden.

***Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.**