Einführung in die Potentialtheorie
Sommersemester 2024
PD Dr. Sarah Eberle-Blick
M. Sc. Johannes Wagner

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

4. Übungsblatt (erschienen am 29.05.2024)

Aufgabe 4.1 (Schriftliche Aufgabe)
Die Funktionen mit den Eigenschaften

i) $P_n(x)$ ist ein Polynom vom Grad n

ii) $\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = 0, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, n \neq m$

iii) $P_n(1) = 1$

heißen Legendre Polynome. Berechnen Sie P_0, P_1 und P_2.

Aufgabe 4.2 (Votieraufgabe)
Betrachten Sie als alternative Definition der Legendre Polynome die Rodriguez Formel:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n.$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n (n-2k)!(n-k)!k!} x^{n-2k}$$

(b) Zeigen Sie, dass die Legendre Polynome die Differentialgleichung

$$(1 - x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

lösen.

(c) Zeigen Sie, dass die Legendre Polynome paarweise orthogonal sind, das bedeutet

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = 0, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, n \neq m.$$

- Zu **schriftlichen Aufgaben** kann eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden. Die Abgabe soll bis zum 07.06.2024 um 12:00 Uhr in Fach 17 in der Robert-Mayer Straße 6-8 erfolgen. Es darf in Zweiergruppen abgegeben werden.

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.