

7. Übungsblatt (erschienen am 27.05.20124)

Aufgabe 7.1 (Votieraufgabe)

Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ eine Folge, die superlinear gegen \bar{x} konvergiert. Zeigen Sie:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x_{k+1} - x_k\|}{\|x_k - \bar{x}\|} = 1.$$

Bemerkung: In der Nähe der Lösung ist also $\|x_{k+1} - x_k\| \approx \|x_k - \bar{x}\|$.

Aufgabe 7.2 (Votieraufgabe)

Sei $f \in C^3([a, b])$ und $x^* \in (a, b)$ eine Nullstelle der Ordnung $r = 2$, d.h. $f(x^*) = f'(x^*) = 0$, $f''(x^*) \neq 0$. Weiter sei $f'' \neq 0$ auf $[a, b]$. Zeigen Sie: Das modifizierte Newton-Verfahren

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - r \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

konvergiert in einer Umgebung von x^* (mindestens) quadratisch gegen x^* .

Aufgabe 7.3 (Schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]

Sei

$$f(x) := \begin{cases} \exp(-\frac{1}{|x|}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass f eine C^∞ -Funktion ist mit $f'(0) = f''(0) = 0$. Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren zur Minimierung von f für alle $0 < x_0 < \frac{1}{3}$ streng monoton fallend gegen $x^* = 0$ konvergiert.

Hinweis: Bringen Sie die Newtoniteration auf die Form $x_{k+1} = \varphi(x_k)x_k$. Was folgt daraus für Häufungspunkte von $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$?

Aufgabe 7.4 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]

In dieser Aufgabe soll der Konvergenzbereich des Newton-Verfahrens angewandt auf die Funktion

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; \quad f(z) = z^3 - 1$$

untersucht werden. Schreiben Sie ein MATLAB-Skript, welches das Quadrat $\{a+ib \mid -2 \leq a, b \leq 2\} \subset \mathbb{C}$ entsprechend färbt, sodass zwei Punkte die selbe Farbe haben, wenn das Newton-Verfahren gestartet an den jeweiligen Punkten gegen die selbe Nullstelle konvergiert. Färben Sie die Punkte, für welche das Newton-Verfahren divergiert weiß. Verwenden Sie hierfür die Funktion `imagesc`. Das Newton-Verfahren für komplexe Funktionen ist mit der gleichen Iterationsvorschrift wie im Reellen definiert.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu den **schriftlichen Aufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 03.06.2024 um 10 Uhr in Fach 17 im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist.
- Zu **Programmieraufgaben*** ist ein kommentierter **MATLAB**-Quellcode zu schreiben, welcher zusammen mit den damit erstellten Plots ausgedruckt werden soll. Der Code ist nicht per Mail einzureichen.
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

*Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.