Optimierung und inverse Probleme
Wintersemester 2024/25
Prof. Dr. Bastian von Harrach-Sammet
M. Sc. Andrej Brojatsch

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

6. Übungsblatt (erschienen am 21.5.2024)

Aufgabe 6.1 (Votieraufgabe)
In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Suchrichtungen des allgemeinen Abstiegsverfahrens zulässig sind, wenn sie die Winkelbedingung erfüllen. Zeigen Sie, dass die Suchrichtungen bereits zulässig sind, wenn sie eine der verallgemeinerten Winkelbedingungen erfüllen:

(a) $\exists\ \alpha > 0,\, p > -1 : \frac{-\nabla f(x_k)^\intercal d_k}{\|\nabla f(x_k)\|\,\|d_k\|} \geq \alpha \|\nabla f(x_k)\|^p$

(b) $\exists\ \alpha_1, \alpha_2 > 0,\, p > -1 : \frac{-\nabla f(x_k)^\intercal d_k}{\|\nabla f(x_k)\|\,\|d_k\|} \geq \min\{\alpha_1, \alpha_2 \|\nabla f(x_k)\|^p\}$

Aufgabe 6.2 (Schriftliche Aufgabe))[4 Punkte]
Gegeben sind die C^2-Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und die Variablentransformation

$$T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : y \mapsto Ay + b =: x$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar und $b \in \mathbb{R}^n$. Bezeichne $\hat{f}(y) = f(T(y))$ die auf y-Koordinaten transformierte Funktion f. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt mit $\nabla f(x) \neq 0$ und invertierbarer Hesse-Matrix $\nabla^2 f(x)$. Weiter bezeichne x_g bzw. x_n das Ergebnis eines Gradienten- bzw. Newton-Schrittes zur Lösung des Problems $\min_{z\in\mathbb{R}^n} f(z)$ ausgehend von $x \in \mathbb{R}^n$:

$$x_g = x - \nabla f(x), \qquad x_n = x - \nabla^2 f(x)^{-1} \nabla f(x).$$

Entsprechend sei y_g bzw. y_n das Ergebnis eines Gradienten- bzw. Newton-Schrittes für $\hat{f}$ ausgehend von $y = T^{-1}(x)$:

$$y_g = y - \nabla \hat{f}(y), \qquad y_n = y - \nabla^2 \hat{f}(y)^{-1} \nabla \hat{f}(y).$$

(a) Drücken Sie $\nabla \hat{f}(y)$ und $\nabla^2 \hat{f}(y)$ mit Hilfe von $\nabla f(x)$, $\nabla^2 f(x)$, A und b aus.

(b) Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren invariant unter der Transformation T ist, d.h. $T(y_n) = x_n$.

(c) Für welche Klasse von Matrizen A ist das Gradientenverfahren invariant unter der Transformation T, d.h. $T(y_g) = x_g$? Für welche nicht?

Aufgabe 6.3 (Multiple Choice)[2 Punkte]
In dieser Aufgabe sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Weiterhin betrachten wir das allgemeine Abstiegsverfahren (Algorithmus 3 der Vorlesung).

(a) Die Suchrichtungen $d_k = -2^{-k} \nabla f(x_k)$ sind zulässig. wahr ☐ falsch ☐

(b) Sei $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$, mit $\phi(x) = 0$ genau dann, wenn $x = 0$, monoton wachsend. Dann sind die $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ zulässig, falls $-\nabla f(x_k)^\intercal d_k \geq \phi(\|\nabla f(x_k)\|)\|d_k\|,\ \forall\ k \in \mathbb{N}$. wahr ☐ falsch ☐

(c) Eine Folge im $\mathbb{R}^n$, die bezüglich einer Norm superlinear konvergiert, konvergiert auch bezüglich jeder anderen Norm superlinear. wahr ☐ falsch ☐

(d) Die Folge $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ konvergiere superlinear gegen $\bar{x}$. Dann gilt: Für $\gamma \in (0,1)$ konvergiert die Folge (x_k) linear mit Rate γ gegen $\bar{x}$. wahr ☐ falsch ☐

Aufgabe 6.4 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]
Verwenden Sie im Folgenden die Abbruchbedingung $\|\nabla f(z_k)\| \leq 10^{-8}$.

(a) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

$$\texttt{function [z,fz] = Gradient\_Powell\_Wolfe(f,}\nabla\texttt{f,z0,}\gamma\texttt{,}\eta\texttt{)}$$

welche das allgemeine Abstiegsverfahren (Algorithmus 3) realisiert. Wählen Sie dazu die Suchrichtungen $d_k = \nabla f(x_k)$ und bestimmen Sie die Schrittweiten mit der Powell-Wolfe Schrittweitenregel (Algorithmus 4).

(b) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

```
function [z,fz] = Newton(f,grad_f,Hess_f,z0)
```

welche das Newton-Verfahren für Optimierungsprobleme (vgl. Algorithmus 6) aus der Vorlesung realisiert.

(c) Verwenden Sie die Funktion aus (a) um das globale Minimum von $f(x,y) = \sqrt{0.5x^2 + y^2 + 1}$. zu bestimmen. Verwenden Sie dazu den Startwert $z_0 = [0.5, 0.5]$, $\gamma = 0.01$ und $\eta = 0.9$.

(d) Verwenden Sie die Funktion aus (b) um das globale Minimum von $f(x,y) = \sqrt{0.5x^2 + y^2 + 1}$. zu bestimmen. Verwenden Sie dazu den Startwert $z_0 = [0.5, 0.5]$ und $z_0 = [1, 1]$.

(e) Zeichnen Sie die Höhenlinien der Funktion $f(x,y) = \sqrt{0.5x^2 + y^2 + 1}$ (MATLAB-Befehl *contour*) sowie die Folge der Iterierten aus **(c)** und **(d)**.

- Zu den **schriftlichen Aufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 27.5.2024 um 10 Uhr in Fach 17 im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist.

- Zu **Programmieraufgaben*** ist ein kommentierter `MATLAB`-Quellcode zu schreiben, welcher zusammen mit den damit erstellten Plots ausgedruckt werden soll. Der Code ist nicht per Mail einzureichen.

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

- Zu **Multiple Choice Aufgaben** soll die Lösung auf diesem Übungsblatt angekreuzt werden. Geben Sie das Blatt versehen mit ihrem Namen zusammen mit der schriftlichen Abgabe ab. **Eine Begründung oder Ausarbeitung wird nicht verlangt**. Es gibt jeweils $+0.5$ Punkte für richtig angekreuzte Antworten und -0.5 Punkt für jedes falsch gesetzte Kreuz. Die Mindestpunktzahl von 0 Punkten kann nicht unterschritten werden.

---

* **Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.**