Einführung in die Potentialtheorie
Sommersemester 2024
PD Dr. Sarah Eberle-Blick
M. Sc. Johannes Wagner

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

---

3. Übungsblatt (erschienen am 15.05.2024, Besprechung am 29.05.2024)

Aufgabe 3.1 (Votieraufgabe)
Beweisen Sie Konsequenz 3: Sei Σ eine reguläre Fläche. Wenn $U \in C^{(0)}(\bar{\Sigma}_{\text{ext}}) \cap C^{(2)}(\Sigma_{\text{ext}})$ und regulär im Unendlichen ist, das heißt:

i) $|U(x)| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \to \infty$

ii) $|\nabla U(x)| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|^2}\right), \quad |x| \to \infty$

und ferner $\Delta U = 0$ in Σ_{ext}, dann gilt:

$$\sup_{x \in \Sigma_{\text{ext}}} |U(x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{impliziert} \quad \sup_{x \in \bar{\Sigma}_{\text{ext}}} |U(x)| \leqslant \varepsilon$$

Aufgabe 3.2 (Votieraufgabe)
Beweisen Sie Lemma 4.2: Sei Σ eine reguläre Fläche. Zeigen Sie, dass für alle $|\tau|, |\sigma|$ klein genug gilt:

$$\inf_{x,y \in \Sigma} |x + \tau\nu(x) - (y + \sigma\nu(y))| = |\tau - \sigma|.$$

Aufgabe 3.3 (Schriftliche Aufgabe)
Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, Σ_{ext} der Außenraum und $F \in C^{(0)}(\Sigma)$. Zeigen Sie, dass die Lösung $U \in C^{(2)}(\Sigma_{ext}) \cap C^{(0)}(\overline{\Sigma}_{ext})$ zu dem Problem

$$\begin{aligned} \Delta U &= 0 \quad \text{in } \Sigma_{ext}, \\ |U(x)| &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \to \infty, \\ |\nabla U(x)| &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|^2}\right), \quad |x| \to \infty, \\ U^+(x) &= F(x), \end{aligned}$$

wobei $U^+(x) = \lim_{\tau \to 0} U(x + \tau\nu(x))$, $x \in \Sigma$, eindeutig ist.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** kann eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden. Die Abgabe soll bis zum 24.05.2024 um 14:00 Uhr in Fach 17 in der Robert-Mayer Straße 6-8 erfolgen. Es darf in Zweiergruppen abgegeben werden.

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.