Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2023/24
6. Februar 2024

Vorlesung
Martin Möller
Johannes Horn
Johannes Schwab
Nicole Müller

Vorlesung

Lie-Gruppen und Gitter

Wintersemester 2023/24

Welche Untergruppen hat $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ oder $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$? Natürlich kann man die Permutationsgruppen und damit jede endliche Gruppe in $\mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$ einbetten. Wenn man sich auf abgeschlossene zusammenhängende Untergruppen einschränkt, so ist dies die Frage nach der Klassifikation von Lie-Gruppen (oder präziser von Matrix-Lie-Gruppen). Beispiele hiefür sind orthogonale Gruppen oder unitäre Gruppen. Der erste Teil der Vorlesung behandelt fundamentale Eigenschaften von Lie-Gruppen bis hin zur Klassifikation von sogenannten einfachen Lie-Gruppen mit Hilfe von Wurzelsystemen.

In $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ oder allgemeiner in $\mathbb{R}^n$ gibt es diskrete kokompakte Untergruppen, welche man auch Gitter nennt. Wenn man $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}^n$ als Gruppe von strikten oberen Dreiecksmatrizen auffasst, ist es eine naheliegende und wichtige Frage, in welchen Lie-Gruppen es Gitter gibt. Wir werden sehen, wie man durch arithmetische Konstruktionen sogenannte arithmetische Gitter bekommt, um die es im zweiten Teil der Vorlesung geht. Um auch das Beispiel $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ in $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ mitaufzunehmen, werden wir den Gitterbegriff mit Hilfe des Haarschen Maßes auf Liegruppen verallgemeinern. Vielleicht werden wird am Ende der Vorlesung zeigen können, dass im Gegensatz zu $\mathbb{R}^n$, Gitter in Lie-Gruppen wie $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ für $n > 2$ starr sind, also nicht deformiert werden können.

1. **Klassische Liegruppen und Beispiele für Gitter** (16.10.23)

   Definition von Matrixliegruppen ('closed linear groups'). Definition von abstrakten Liegruppen [Kna02, §Intro.4]. Definition komplexer Liegruppen [Kna02, §I.11].

   Beispiele: Diagonalmatrizen (Tori), strikte obere Dreiecksmatrizen (unipotente Gruppen). Die klassischen komplexen halbeinfachen Liegruppen $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{C})$ und $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{C})$. Kompakte Liegruppen $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$. Nichtkompakte reelle halbeinfache Liegruppen $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(p,q)$, $\mathrm{SU}(p,q)$. [Mor15, §I.17]

   Die Lie-Algebra einer Matrix-Liegruppe [Kna02, §Intro.1] ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

   Ein Überblick über das grobe Programm des Semesters: Klassifikation von halfeinfachen Lie-Algebren und halbeinfachen Liegruppen, Wurzelsysteme [Kna02, §II und §VI]. Symmetrische Räume und lokalsymmetrische Räume ('$K\backslash G/\Gamma$') als Parameterräume (z.B. für abelsche Varietäten). [Mor15, §1]. Haarsches Maß [Kna02, §VIII.3], [Mor15, §A.3]. Definition von Gitter also kokompakte bzw. koendliche diskrete Untergruppen. Beispiele für arithmetische Gitter [Mor15, §3 und §7]. Starrheitssätze.

2. **Lie-Algebra, Exponentialabbildung** (19.10.23)

   Eigenschaften der Lieklammer, abstrakte Definition einer Lie-Algebra. Eigenschaften der Exponentialabbildung. Standardvertreter für Kurven in Matrixliegruppen.

   Beweis, dass Matrixliegruppen wirklich Liegruppen sind [Kna02, Theorem 0.15]: Eindeutigkeit und vorbereitendes Lemma.

3. **Homomorphismen von Matrix-Liegruppen [Kna02, §0.5]** (23.10.23)

   Ende des Beweises: Matrixgruppen sind Liegruppen. Satz: $\pi : G \to H$ glatter Homomorphismus, dann definiert das Differential bei 1 einen Liealgebrenhomomorphism. Satz: $\pi \circ \exp_G = \exp_H \circ \pi$ [Kna02, Theorem 0.23].

4. **Abstrakte Liealgebren [Kna02, §I.1, §I.2]** (26.10.23)

   Korollar aus letztem Satz: Falls $d\pi$ injektiv/surjektiv/bijektiv ist, dann ist π injektiv in einer Umgebung der 1. Es ist $H^o \subset \mathrm{Bild}(\pi)$ und π ist lokaler Isomorphismus [Kna02, Corollary 0.26].

   Definition Liealgebra über k. Beispiele: abelsche Liealgebren, assoziative Algebra wird Liealgebra mit Kommutator, Matrix-Liealgebren, eindimensionale Liealgebren, zweidimensionale Liealgebren, $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$.

   Grundlegende algebraische Konzepte: Unterliealgebra, Ideal, Homomorphismus, Isomorphismus, Quotientenliealgebra, Kern, Bild, Isomorphiesatz. Proposition: Summe, Schnitt, Kommutator von Idealen ist Ideal [Kna02, Prop. 1.7.].

   Kommutatorreihe, untere Zentralreihe, Definition auflösbar, nilpotent. Beispiel (strikte) obere Dreiecksmatrizen.

5. **Cartans Kriterium für Halbeinfachheit [Kna02, Theorem 1.45]** (30.10.23)

   Einfache und halbeinfache Liealgebren (im Sinne: keine nichttrivialen Ideale). Halbeinfachheit ist äquivalent zu Summe von einfachen Liealgebren [Kna02, Theorem 1.54]. (Eine Implikation is formal, die zweite dient als Motivation für Cartans Kriterium.)

   Killing-Form, Radikal einer Bilinearform. Aussage von Cartans Kriterium für Halbeinfachheit [Kna02, Theorem 1.45] und für Auflösbarkeit [Kna02, Proposition 1.46].

   Aus [Kna02, Proposition 1.46] folgt 'alles': Radikal der Killing-Form ist im Radikal der Liegruppe. Damit folgt das Halbeinfachheitskriterium formal mit Matrizenrechnung.

6. **Cartans Kriterium für Auflösbarkeit [Kna02, Proposition 1.46]** (02.11.23)

   Für die Umkehrung Beweis des Auslösbarkeitskriteriums: Körpererweiterung von Liealgebren beieinflusst Auflösbarkeit und Radikalinklusion nicht [Kna02, Proposition 1.17 und S. 52 oben].

   Liealgebrendarstellungen [Kna02, Kapitel I.5] und der Satz von Lie (Auflösbare Liegruppen sind in jeder Darstellung obere Dreiecksmatrizen nach geeigneter Basiswahl, Aussage ohne Beweis) [Kna02, Theorem 1.25 bzw. Korollar 1.29]. Damit wird eine Implikation des Auslösbarkeitskriteriums bewiesen.

Satz von Engel (ohne Beweis): Ein Unterliealgebra der Endomorphismenalgebra ist nilpotent genau dann wenn jedes Element nilpotent ist [Kna02, Theorem 1.35]. Inbesondere ist sie zu einer Unteralgebra der strikten oberen Dreiecksmatrizen konjugiert.

Satz über die Jordannormalform (Diagonalisierbar plus Nilpotent) mit Eindeutigkeitsaussage und polynomialer Darstellbarkeit.

Damit wird die andere Implikation des Auslösbarkeitskriteriums bewiesen.

7. **Reduktive Lie-Algebren, Beispiele, Motivation für Klassifikation** (06.11.23)

   Definition reduktiver Lie-Algebren, das Kriterium in [Kna02, Proposition 1.59]. Die Liealgebren zu klassischen Liegruppen sind reduktiv. Halbeinfachheit folgt durch Zentrumsbestimmung ggf. nach Übergang zu Spur Null.

   (Die Vorlesung geht weiter mit der Klassifikation von halbeinfachen Liealgebren [Kna02, Kapitel II]. Zu (fast) all diesen Liealgebren kennen wir klassische Liegruppen mit der entsprechenden Liealgebra. Die Struktur der Lie-Algebra gibt dann Rückschlüsse über die Gruppenstruktur. Für Matrixliegruppen geschieht dies über die Exponentialabbildung. Für abstrakte Liegruppen ist [Kna02, Kapitel I.10]. Besser steht das in [Bum13], Kapitel 6-8 und Kapitel 14, insbesondere Theorem 14.2.)

   Reelle Formen von Liealgebren. Das Beispiel $\mathrm{sl}(n, \mathbb{C})$ hat die reellen Formen $\mathrm{sl}(n, \mathbb{R})$ und $\mathrm{su}(n)$.

   Wurzelraumzerlegung am Beispiel $\mathrm{sl}(n, \mathbb{C})$.

8. **Cartan-Unteralgebren und Wurzelraumzerlegung** (09.11.23)

   Fortsetzung des Beispiels $\mathrm{sl}(n, \mathbb{C})$: Kriterium für Einfachheit.

   Definition von Cartan-Algebren für halbeinfache Liegruppen als maximal abelsche Unteralgebren, deren ad-Operation diagonalisierbar ist.

   Wurzelraumzerlegung bezüglich einer Cartan-Unteralgebra und Kommutatorregeln für Wurzelraumzerlegung.

   (Die Reihenfolge weicht von [Kna02] ab: Dieser Zugang gibt schneller das Wesentliche, die Wurzelraumzerlegung. [Kna02] behandelt allgemeiner Cartan-Unteralgebren von komplexen Liegruppen. Die nächste Vorlesung, insbesondere [Kna02, Proposition 2.13 und Corollary 2.23] zeigen dann, dass die beiden Definitionen im halbeinfachen Fall übereinstimmen.)

9. **Eindeutigkeit von Cartan-Unteralgebren** (13.11.23)

   Bei der Wurzelraumzerlegung bzgl. einer Cartan-Unteralgebra ist der Nulleigenraum gleich der Cartan-Unteralgebra (Argumente von [Kna02, Proposition 2.13]).

   Automorphismengruppen von Liealgebren und innere Automorphismen [Kna02, Kapitel I.11].

   Reguläre Elemente einer Liealgebra bezüglich einer Darstellung [Kna02, Kapitel II.2].

Cartan-Unteralgebren sind bis auf innere Automorphismen eindeutig. Insbesondere ist deren Dimension eine Invariante, der Rang der Liealgebra [Kna02, Kapitel II.3].

10. **Abstrakte Wurzelsysteme** (16.11.23)

    Beweis von: Cartan-Unteralgebren sind bis auf innere Automorphismen eindeutig. Dabei wurde ohne Beweis verwendet, dass $g_{O,Y}$ für reguläre Elemente von $\mathfrak{g}$ bzgl. der adjungierten Darstellung Cartan-Algebren bilden (dies ist [Kna02, Theorem 2.9' und Corollary 2.23]).

    Definition eines (reduzierten) abstrakten Wurzelsystems.

    Komplexe halbeinfache Liealgebren geben ein reduziertes Wurzelsystem [Kna02, Theorem 2.42]. Beginn des Beweis durch Angabe einer Bilinearform auf dem Spann der Wurzeln. Eigenräume sind eindimensional und echte positive Vielfache von Wurzeln sind keine Wurzeln. [Kna02, Proposition 2.21].

11. **Wurzelsysteme zu halbeinfachen Liealgebren** (20.11.23)

    Fortsetzung des Beweises von [Kna02, Theorem 2.42]. Ad-Operation auf Ketten von Wurzeln und Eigenschaften von $\mathfrak{sl}_2$-Darstellungen ([Kna02, Theorem 1.66 und Theorem 1.67] ohne Beweis importiert) geben das Rationalitätsaxiom und das Spiegelungsaxiom.

    Positivitätsbegriff auf Wurzelsystem, einfache Wurzeln. Es gibt eine Basis aus einfachen Wurzeln und jede Wurzel ist total positiv oder total negativ dargestellt in solch einer Basis.

12. **Cartan-Matrix und Dykin-Diagramm** (23.11.23)

    Cartan-Matrix assoziiert zu einem Wurzelsystem mit Positivitätsbegriff. Definition der abstrakte Cartan-Matrix. Proposition: Die Cartan-Matrix zu einem Wurzelsystem ist eine abstrakte Cartan-Matrix [Kna02, Prop 2.52.]. Beispiel: B_n.

    Definition des Dynkin-Diagramms zu einer abstrakten Cartan-Matrix A nach Wahl von Diagonalmatrix D mit DAD^{-1} symmetrisch und positiv definit. Beispiel: B_n. Definition der Irreduzibilität der Cartan-Matrix. Wohldefiniertheit des Dynkin-Diagramms bis auf Äquivalenz [Kna02, Lemma 2.56]. Das Dynkin-Diagramm bestimmt die Cartan-Matrix eindeutig [Kna02, Ende von II.5].

13. **Einfache Systeme von Wurzeln und Weyl-Gruppe** (27.11.23)

    Einfaches System von Wurzeln [Kna02, Abschnit II.6] definiert Positivitätsbegriff. Die Weyl-Gruppe ist erzeugt von Reflexionen in einem einfachen System. Zwei einfache Syteme gehen durch ein eindeutiges Element der Weyl-Gruppe ineinander über. Dies gibt Wohldefiniertheit und Injektivität der Zuordnung "Wurzelsystem gibt Cartan-Matrix".

    Schritte zur Klassifikation von Dynkin-Diagrammen: Entfernen von Knoten und Zusammenziehen einer einfachen Kante gibt wieder ein Dynkin-Diagramm [Kna02, Abschnitt 7]. Propportionalität der Gewichte bei mehrfachen Knoten.

14. **Abschluss der Klassifikation von halbeinfachen Liealgebren/$\mathbb{C}$** (30.11.23)

Wiedergewinnung der einfachen Wurzeln gegeben die Cartanmatrix. Beweis von [Kna02, Prop. 2.78]. Herleitung des Klassifikationsatz [Kna02, Satz 2.84] (ohne Rechnung [Kna02, Seite 178-179]. Surjektivität von Schritt 2 in der Klassifikation [Kna02, Prop. 2.87]. Surjektivität von Schritt 1: Standarderzeuger [Kna02, Prop. 2.94], Serre-Relationen [Kna02, Prop. 2.95], Freie Liealgebra [Kna02, Prop 2.96] (ohne Beweis), Satz von Serre [Kna02, Satz 2.98, Satz 2.111] (ohne Beweis).

15. **Spaltbare und kompakte reelle Form** (04.12.23)

Definition kompakte reelle Form als reelle Form, sodass die Killingfrom negativ definit ist. Definition der spaltbaren reelle Form [Kna02, Seite 352]. Satz: Jede komplexe halbeinfache Liealgebra hat eine spaltbare und eine kompakte reelle Form [Kna02, Cor. 6.10, Thm 6.11]. Beweis über Satz von Weyl-Chevalley, siehe [Sam90, § 2.9 Thm A].

16. **Zurück zu Liegruppen 1** (07.12.23)

Beweis der Existenz der kompakten reellen Form [Kna02, Thm 6.11]. Die Automorphismen-Gruppen einer reellen Liealgebra [Kna02, §I.14]: Liealgebra sind die Derivationen [Kna02, Prop. 1.120.], innere Automorphismen, Wiedergewinnung einer Liegruppe mit gegebener halb-einfacher Liealgebra als Gruppe der inneren Automorphismen. Satz: Die Gruppe der inneren Automorphismen einer kompakte Liealgebra ist kompakt [Kna02, Prop. 4.27].

Die Liealgebra der links-invarianten Vektorfelder auf einer abstrakten Liegruppe [Bum13, Prop. 7.1]. Das Differential eines Liegruppenhomomorphismus ist ein Liealgebrenhomomorphismus [Bum13, Prop. 7.3]. Existenz von integralen Kurven zu einem Vektorfeld [Bum13, Prop. 8.1]. Satz: Exponentialabbildung ist lokaler Diffeomorphismus [Bum13, Thm. 8.1].

17. **Haarmaß auf Liegruppen** (11.12.23)

Beweis [Bum13, Thm. 8.1]. Das Exponential kommutiert mit dem Differential [Bum13, Prop. 8.2]. Die adjungierte Darstellung Ad einer Liegruppe hat Differential ad [Bum13, Thm. 8.2] (ohne Beweis).

Differentialformen und Maße auf orientierbaren Mannigfaltigkeiten [Kna02, §8.1 bis Prop. 8.10]. Existenz des Haarmaß [Kna02, Thm. 8.21].

18. **Haarmaß auf Liegruppen 2** (14.12.23)

Eindeutigkeit des Haarmaß [Kna02, Thm. 8.23]. Modulare Funktion Δ [Kna02, Gl. 8.26]. $\Delta(g) = |\det \mathsf{Ad}(g)|$ [Kna02, Prop. 8.27]. Verträglichkeit der Inversion mit dem Haarmaß, rechts-modulare Funktion= links-modulare Funktion [Kna02, Cor. 8.30]. Abelsche, kompakte und halbeinfache Gruppen sind unimodular [Kna02, Cor. 8.31 a-c].

19. **Zurück zu Liegruppen 2** (18.12.23)

Fünf äquivalente Charakterisierungen von kompakten Lie-algebren (Killing negativ semidefinit, Existenz eines Skalarprodukts bzgl. dem ad schiefsymmetrisch operiert, die Gruppe der inneren Automorphismen ist kompakt, Liealgebra einer kompakten Gruppe, Einbettung in die spezielle orthogonale Liealgebra), siehe [Kna02, Prop. 4.6, 4.24, 4.26], sowie die folgenden Sätze, um zu einer Liegruppe zurückzukommen.

Satz von Ado (endlichdimensionale reelle oder komplexe Liealgebren haben eine Einbettung nach $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, ohne Beweis). Zu einer gegebenen Lie-Unteralgebra in $\mathrm{Lie}(G)$ gibt es eine lokale Untergruppe von G. Zu einem gegebenen Liealgebren-Homomorphismus gibt es einen lokalen Homomorphismus [Bum13, Prop. 14.1 und 14.2]. Aussage (ohne Beweis) des Satzes von Frobenius [Bum13, Thm 14.1] zum Beweis dieser zwei Propositionen. Fortsetzung von lokalem Homomorphismus auf einfach zusammenhängende Liegruppe [Bum13, Thm. 13.3] (Skizze ohne Details.)

Um daraus die Existenz einer analytischen Untergruppe (in einer linear Gruppe) zu gegebener endlichdimensionaler reeller oder komplexer Liealgebra zu finden muss man lokale Untergruppen "aufintegrieren" (Aussage von [Hal15, Theorem 5.20], ohne Beweis).

20. **Fundamentalgruppen und Cartan-Zerlegung** (21.12.23)

Die universelle Überlagerung einer zusammenhängenden Liegruppe hat eine eindeutige verträgliche Gruppenstruktur [Kna02, Prop. 1.97]. Polarzerlegung als Spezialfall Cartan-Zerlegung. [Bum13, Theorem 13.4]. Verallgemeinerung auf algebraische Gruppen, die unter 'adjungierte Matrix nehmen" abgeschlossen sind ([Kna02, Prop. 1.131], ohne Beweis). Fundamentalgruppe der (speziellen) linearen Gruppe [Bum13, Theorem 13.5].

21. **Homogene und symmetrische Räume** (08.01.24)

Definition von homogenen Räumen. Beispiele aus [Mor15, Kapitel 1]: Hyperbolischer Raum, affiner Raum und Sphären.

Definition von symmetrischen Räumen. G/K für den Zentralisator K einer Involution gibt einen symmetrische Raum. Konstruktion einer G-invarianten Metrik auf dem Quotienten. Irreduzible symmetrische Räume sind immer von der Form G/K (Cartan, ohne Beweis)

22. **Lokalsymmetrische Räume und Gitter** (11.01.24)

Beispiel: Haarmaß auf $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ und invariante Metrik auf der oberen Halbebene.

Definition von lokal-symmetrischen Räumen. Eigentlich und eigentlich diskontinuierliche Gruppenoperationen bilden Überlagerungen auf Hausdorffsche Quotienten (Überblick über Begriffe ohne Beweise). Beispiel als Quotient $\mathbb{H}$ nach zyklischer diskreter Untergruppe von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

Definition von Gittern. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist ein Gitter in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Nicht-unimodulare Gruppen haben keine Gitter.

23. **Fundamentalbereiche und Siegelmengen** (15.01.24)

Fundamentalbereiche und Gitter [Mor15, Prop. 4.1.11]. Definition kokompakte Gitter und Korollar [Mor15, Coro. 4.1.14]. Definition Kommensurabilität [Mor15, Def. 4.2.1]. Eine Untergruppen kommensurabel zu einem Gitter ist ein Gitter [Mor15, Ex. 4.1.10 und 4.1.13]. Iwasawa für $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ [Mor15, Thm. 7.1.1]. Siegelmengen für $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ [Mor15, Def. 7.2.4].

24. $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ **ist ein Gitter** (18.01.24)

Beweis: Siegelmengen schneiden jede Bahn und haben endliches Volumen [Mor15, §7.3 und Prop. 7.2.5]. Selbergs Lemma für $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ [Mor15, Thm. 4.8.2, Case 1 des Beweises].

25. **Ganzzahlige Punkte in über $\mathbb{Q}$ definierten Liegruppen** (22.01.24)

Äquivalente Definition von Gittern in $\mathbb{R}^n$ als Motivation. Liegruppen definiert über einem Körper [Mor15, Definition 5.1.2], Beispiele.

Ganzzahlige Punkte einer über $\mathbb{Q}$ definierten Liegruppe bilden ein Gitter [Mor15, Theorem 5.1.1]. Ohne Beweis (steht in [Mor15, Kap. 19], aber mit Erklärungen was im Vergleich zum Beweis für $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ zur Konstruktion von Siegelmengen verändert werden muss (Begriff $\mathbb{Q}$-Rang).

Arithmetische Gitter der Form $G_{\mathbb{Z}}$ in Quaternionenalgebren [Mor15, Prop. 6.2.4] mit Grundbegriffen über Quaternionenalgebren.

26. **Kompaktheitskriterien** (23.01.24)

Kokompaktheitskritieren für Gitter: via Injektivitätsradius [Mor15, Prop. 4.4.1] und durch unipotente Elemente (Godement, [Mor15, Prop. 5.3.1]. Dabei Jacobson-Morosov-Lemma nur für $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Abschluss des Beweises von [Mor15, Prop. 6.2.4].

27. **Arithmetische Gitter, Einschränkung der Skalare I** (29.01.24)

Definition arithmetische Untergruppe [Mor15, Def. 5.1.19]. Wahl der $\mathbb{Q}$-Form [Mor15, Abschnitt 5.4, Prop. 5.4.5]. Beispiele für Einschränkung des Skalar: [Mor15, Exam. 5.5.3, 5.5.4].

28. **Einschränkung der Skalare II** (01.02.24)

Unendliche Stellen eines Zahlkörpers. Einschränkung des Skalar einer Matrixgruppe über einem algebraischen Zahlkörper [Mor15, Def. 5.5.6]. Arithmetische Untergruppe via Einschränkung des Skalar [Mor15, Prop. 5.5.8]. Für G einfach können alle arithmetischen Untergruppen so konstruiert werden [Mor15, Cor. 5.5.16]. Untergruppen von $\mathsf{SO}(n,1)$ via Einschränkung des Skalar [Mor15, Exam. 6.1.2]. Satz: Alle kokompakten arithmetischen Untergruppen von $\mathsf{SO}(n,1)$ sind durch voriges Beispiel gegeben [Mor15, Prop. 6.1.4].

29. **Mahlers Kompaktheitskriterium** (05.02.24)

Mahlers Kompaktheitskriterium [Mor15, Cor. 4.4.7]. Als Konsequenz: Die ganzzahlen Punkte in $\mathrm{SO}(B,\mathbb{R})$ sind ein kokompaktes Gitter wenn B die Null nur trivial darstellt.

Beweis von [Mor15, Prop. 6.1.4]. In $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ sind alle nicht-kokompakten Gitter bis auf Kommensurabilität und Konjugation gleich $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ [Mor15, Prop. 6.1.5].

30. **Rigidität und Arithmetizität** (08.02.24)

Beispiel für ein nicht-kokompaktes Gitter in $\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$, das nicht konjugiert kommensurable zu $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ ist.

Der Begriff $\mathbb{R}$-Rang [Mor15, Abschnitt 8]. Die Gruppen $\mathrm{SO}(m,n)$ haben Rang $\min(m,n)$. Gruppen vom $\mathbb{R}$-Rang eins.

Ein Überblick über zentralen Sätze 'seit Margulis' ohne Beweis: Mostows Starrheitssatz, Margulis' Superstarrheitssatz, Margulis Arithmetizitätssatz.

Literatur

[Bum13] Daniel Bump. *Lie groups*. Second. Bd. 225. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2013.

[Hal15] Brian Hall. *Lie groups, Lie algebras, and representations*. Second. Bd. 222. Graduate Texts in Mathematics. An elementary introduction. Springer, Cham, 2015. ISBN: 978-3-319-13466-6.

[Kna02] Anthony W. Knapp. *Lie groups beyond an introduction*. Second. Bd. 140. Progress in Mathematics. Birkhäuser, Boston, 2002.

[Mor15] Dave Witte Morris. *Introduction to arithmetic groups*. Deductive Press, 2015.

[Sam90] Hans Samelson. *Notes on Lie algebras*. 2nd. ed. Universitext. Springer-Verlag, New York, 1990. ISBN: 0-387-97264-1.