Prof. Dr. Bastian von Harrach-Sammet
Johannes Wagner, M. Sc.

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

13. Übungsblatt (erschienen am 23.01.2024)

Aufgabe 13.1 (Votieraufgabe)

(a) Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ eine Folge, die gegen $\hat{x}$ konvergiert mit $\|x_{k+1}-\hat{x}\|/\|x_k-\hat{x}\| \to 0$ für $k\to\infty$. Zeigen Sie, dass dann $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ superlinear gegen $\hat{x}$ konvergiert und dass

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|x_{k+1}-x_k\|}{\|x_k-\hat{x}\|} = 1.$$

(In der Nähe der Lösung ist also $\|x_{k+1}-x_k\| \approx \|x_k-\hat{x}\|$.)

(b) Sei $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine positive Nullfolge, mit $\varepsilon_{k+1} \le C\varepsilon_k\varepsilon_{k-1}$ für $k\ge 2$, $C>0$ und $\varepsilon_1, \varepsilon_2 < 1/C$. Zeigen Sie, dass dann $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ superlinear konvergiert.

(c) Sei $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit der Eigenschaft

$$\varepsilon_k = \begin{cases} \frac{1}{2}\,\varepsilon_{k-1}, & k \text{ gerade} \\ \frac{1}{4}\,\varepsilon_{k-1}, & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Berechnen Sie den Konvergenzfaktor von $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

(d) Konstruieren Sie eine linear konvergente Nullfolge $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$, für die der Grenzwert $\lim_{k\to\infty}\varepsilon_k^{1/k}$ nicht existiert.

Aufgabe 13.2 (schriftliche Aufgabe)[3 Punkte]

Sei $T\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $c\in\mathbb{C}^n$. Die Abbildung $\Phi:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ sei definiert durch

$$\Phi(x) = Tx + c.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Fixpunktiteration $x^{(k+1)} := \Phi(x^{(k)})$ konvergiert, wenn $\rho(T) < 1$ ist, wobei $\rho(T)$ den Spektralradius von T bezeichnet.

(b) Weisen Sie für $\rho(T) > 1$ nach, dass die Fixpunktiteration $x^{(k+1)} := \Phi(x^{(k)})$ nicht für jeden Startvektor $x^{(0)}$ konvergiert.

Aufgabe 13.3 (schriftliche Aufgabe)[3 Punkte]

Sei $a>0$ eine beliebige reelle Zahl. Betrachtet wird die Fixpunktiteration

$$x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)}) = \frac{1}{2}\left(x^{(k)} + \frac{a}{x^{(k)}}\right).$$

Zeigen Sie, dass diese für jeden Startpunkt $x^{(0)}\in(0,\infty)$ gegen $\sqrt{a}$ konvergiert.

Aufgabe 13.4 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]
Betrachten Sie die mehrdimensionale, stetig differenzierbare Funktion

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (\xi, \eta)^\intercal \longrightarrow \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \xi e^{-\eta^2} + \xi\eta - 6\xi + 3 \\ \log(1 + \eta^2 + \xi^2) - 6\eta - 1 \end{pmatrix}.$$

Vergewissern Sie sich, dass die Nullstellenaufgabe $F(x) = 0$, $x = (\xi, \eta)^\intercal$, äquivalent ist zu der Fixpunktaufgabe aus Aufgabe 12.1. Implementieren Sie das mehrdimensionale Newton-Verfahren, um die Nullstellenaufgabe zu lösen, gehen Sie wie folgt vor:

(a) Implementieren Sie die Funktion `y = F(x)`, welche den Wert der Funktion F für einen Punkt x berechnet.

(b) Implementieren Sie die Funktion `J = Jacobian(x)`, welche die Jakobimatrix von F für einen Punkt x berechnet.

(c) Implementieren Sie die Funktion `[x_final, n_iter] = Newton(F,Jacobian,x0,x_approx,tol)`, welche das Newtonverfahren für eine Funktion F durchführt.

Hierbei ist `x_approx` eine Approximation an die Nullstelle der Funktion und das Verfahren soll abbrechen, sobald

$$\|x^{(k)} - \texttt{x\_approx}\|_\infty \leq \texttt{tol}.$$

Verwenden Sie den Startwert $\texttt{x0} = (0, -1)^\intercal$, und für das Abbruchkriterium den im Code vorgegebenen Wert `x_approx`.

Die Funktion `vergleiche_Fixpunkt_Newton(@Newton,@F,@Jacobian)` vergleicht die Konvergenzgeschwindigkeit des Newtonverfahrens mit der Fixpunktiteration. Was können Sie beobachten?

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu schriftlichen Aufgaben soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 30.01.2024 um 10:00 Uhr in Fach 17 abzugeben ist. Die Abgabe und Bearbeitung der schriftlichen Aufgaben darf in Zweiergruppen erfolgen.

- Zu Programmieraufgaben ist bis zum 30.01.2024 um 10:00 Uhr ein `MATLAB`-Quellcode zu schreiben, welcher in den `MATLAB`-Grader einzugegeben ist und dort automatisiert korrigiert wird. Die Abgabe wird gewertet und kann nicht mehr geändert werden, sobald Sie den Senden-Button klicken.

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.