Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2023/2024
22. Januar 2024

Lie-Gruppen und Algebraische Gruppen
Prof. Dr. Martin Möller
Dr. Johannes Horn
Johannes Schwab
Nicole Müller

Übungsblatt 12

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Betrachte die Iwasawazerlegung $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = NAK$. Für $c_1 < c_2 \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}^+$ wählen wir die Teilmengen

$$\begin{aligned} N_{c_1,c_2} &:= \{u \in N \mid c_1 \leq u_{i,j} \leq c_2 \text{ für } i < j\} \subseteq N, \\ A_c &:= \{\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n) \in A \mid a_i \geq c a_{i+1} \text{ für } i = 1, \ldots, n-1\} \end{aligned}$$

und die Siegelmenge $\mathcal{S}_{c_1,c_2,c} = N_{c_1,c_2} A_c K$.

(a) Sei $\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n) \in A_c$. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\mathcal{S}_{c_1,c_2,c}} \prod_{i<j} \frac{a_j}{a_i} < \infty.$$

(b) Folgern Sie, dass die Siegelmenge $\mathcal{S}_{c_1,c_2,c}$ endliches Maß hat.

Hinweis: Seien dg, dk, da, du die Haarmaße auf den Gruppen $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, K, A, N. Für $a \in A$ sei $\rho(a)$ die Jakobische der Operation von a auf N via Konjugation. Sie dürfen aus der Vorlesung verwenden dass für $f \in C_c(G)$ gilt

$$\begin{aligned} \int_G f\, dg &= \int_K \int_N \int_A f(kua)\, da\, du\, dk \\ &= \int_K \int_A \int_N f(kau)\, \rho(a)\, du\, da\, dk \end{aligned}$$

und dass

$$\rho(\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)) = \prod_{i<j} \frac{a_j}{a_i}.$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $\mathcal{L}$ ein $\mathbb{Z}$-Gitter in $\mathbb{R}^n$. Wir bestimmen eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von $\mathbb{R}^n$ auf folgende Weise: Sei v_1 ein Vektor in $\mathcal{L} \setminus \{0\}$ minimaler Länge. Für die restlichen Vektoren verfahren wir induktiv. Angenommen wir haben $v_1, \ldots, v_i$ gewählt, dann sei $V_i = \langle v_1, \ldots, v_i \rangle$ und $\mathrm{proj}_i^\perp : \mathbb{R}^n \to V_i^\perp$ die orthogonale Projektion. Wir wählen $v_{i+1} \in \mathcal{L}$ so dass $\mathrm{proj}_i^\perp v_{i+1}$ minimal aber nicht 0 ist. Zeigen Sie:

(a) Sind X und Y Untergruppen von V_{i+1} so dass

$$X \subseteq Y,\ X \cap V_i = Y \cap V_i,\ \mathrm{proj}_i^\perp X = \mathrm{proj}_i^\perp Y,$$

dann ist $X = Y$.

(b) Die Gruppe $\mathrm{proj}_i^{\perp}(\mathcal{L} \cap V_{i+1})$ ist zyklisch.

(c) Die Basisvektoren $v_1, \ldots, v_n$ erzeugen $\mathcal{L}$ als abelsche Gruppe.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Hauptkongruenzuntergruppe Γ_n für $n \geq 3$ torsionsfrei ist.

Abgabe in der Vorlesung am **Montag, den 29. Januar**.