Vorlesung Numerische Mathematik
Wintersemester 2023/24
Prof. Dr. Bastian von Harrach
Johannes Wagner, M. Sc.

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

12. Übungsblatt (erschienen am 16.01.2024)

Aufgabe 12.1 (schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]
Betrachtet wird die Fixpunktaufgabe $x = \Phi(x), x = (\xi, \eta)^T$, mit

$$\Phi(x) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \xi e^{-\eta^2} + \xi\eta + 3 \\ \log(1 + \eta^2 + \xi^2) - 1 \end{pmatrix}$$

auf dem Intervall $I = [0, 1] \times [-1, 1]$.

(a) Weisen Sie die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes mit $q = \frac{5}{6}$ bezüglich der Maximumsnorm nach.

(b) Es seien $x^{(k)}$ die Iterierten der Fixpunktiteration $x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)})$ mit Startvektor $x^{(0)} = (0, 0)^T$ und $\hat{x}$ bezeichne den Fixpunkt von Φ auf I. Wieviele Iterationsschritte sind hinreichend, um

$$\|x^{(k)} - \hat{x}\| \leq 10^{-3}$$

garantieren zu können?

Aufgabe 12.2 (Votieraufgabe)
Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Weisen Sie nach, dass der *Spektralradius* $\rho(A)$,

$$\rho(A) := \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}$$

im Allgemeinen keine Matrixnorm ist. Kennen Sie eine Klasse von Matrizen, für die der Spektralradius eine Norm ist?

Aufgabe 12.3 (Votieraufgabe)

(a) Sei $\|\cdot\|$ eine Vektornorm und $\|\cdot\|$ die davon induzierte Matrixnorm. Zeigen Sie, dass für jede reguläre Matrix $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ durch $\|x\|_S := \|Sx\|$, für $x \in \mathbb{C}^n$, eine Vektornorm definiert wird und $\|A\|_S := \|SAS^{-1}\|$ die zugehörige induzierte Matrixnorm ist.

(b) Zu $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sei $V^{-1}AV = J$ die Jordan-Normalform. Betrachten Sie die Zeilensummennorm $\|\cdot\|_\infty$ und die Matrix $S = D^{-1}V^{-1}$ mit

$$D = \begin{pmatrix} \varepsilon & & & 0 \\ & \varepsilon^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \varepsilon^n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Weisen Sie die Ungleichung

$$\|A\|_S \leq \rho(A) + \varepsilon$$

nach.

Aufgabe 12.4 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]
Betrachten Sie die Fixpunktiteration aus Aufgabe 1. Das Verfahren soll abbrechen, sobald

$$\|x^{(k)} - \hat{x}\| \leq 10^{-N}$$

für $N \in \mathbb{N}$. Implementieren Sie

(a) Die Funktion `[x_final, n_iter] = fixpoint_iteration_apriori(x0,tol)`, welche die a-priori Schranke aus Satz 3.1 (b) für die Abbruchbedingung verwendet

(b) Die Funktion `[x_final, n_iter] = fixpoint_iteration_aposteriori(x0,tol)`, welche die a-posteriori Schranke aus Satz 3.1 (c) für die Abbruchbedingung verwendet

wobei als Startwert $x^{(0)} = (0, -1)^\intercal$ gewählt werden soll. Das Verfahren soll dabei die letzte Iterierte und die benötigte Anzahl an Iterationen ausgeben. Vervollständigen Sie den angegebenen Code derart, dass die Anzahl der benötigten Iterationen für `tol` $= 10^{-N}$, mit $N = 1, 2, \ldots, 10$ in doppelt logarithmischer Skala geplottet wird. Was beobachten Sie?

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu schriftlichen Aufgaben soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 23.01.2024 um 10:00 Uhr in Fach 17 abzugeben ist. Die Abgabe und Bearbeitung der schriftlichen Aufgaben darf in Zweiergruppen erfolgen.
- Zu Programmieraufgaben ist bis zum 23.01.2024 um 10:00 Uhr ein MATLAB-Quellcode zu schreiben, welcher in den `MATLAB`-Grader einzugegeben ist und dort automatisiert korrigiert wird. Die Abgabe wird gewertet und kann nicht mehr geändert werden, sobald Sie den Senden-Button klicken.
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.