Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2023/2024
16. Januar 2024

Lie-Gruppen und Algebraische Gruppen
Prof. Dr. Martin Möller
Dr. Johannes Horn
Johannes Schwab
Nicole Müller

Übungsblatt 11

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Sei G eine halbeinfache Liegruppe und $\Lambda \subseteq G$ eine diskrete Untergruppe.

(a) Sei $\mathcal{F}$ ein strikter Fundamentalbereich und μ ein Rechts-Haarmaß auf G. Für jede Borelmenge $A \subseteq G$ definierne wir $\nu(A/\Lambda) = \mu(A \cap \mathcal{F})$. Zeigen Sie, dass ν ein σ-endliches, G-invariantes Borelmaß auf G/Λ definiert.

(b) Sei ν ein σ-endliches, G-invariantes Borelmaß auf G/Λ. Zeigen Sie, dass

$$\mu(A) = \int_{G/A} \#(A \cap x\Lambda) d\nu(x\Lambda)$$

ein G-invariantes Borelmaß auf G definiert.

(c) Folgern Sie, dass es auf G/Λ ein (bis auf skalare Vielfache) eindeutiges σ-endliches G-invariantes Borelmaß gibt.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ der offene Einheitsball, und sei $T_x B^n$ mit dem inneren Produkt

$$\langle u, v \rangle_{B^n} = \frac{1}{(1 - \|x\|^2)^2} \langle u, v \rangle_{\mathbb{R}^n}$$

versehen.

(a) Sei $e_n \in \mathbb{R}^n$ der n-te Einheitsvektor. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi : B^n &\to \mathbb{H}^n \\ x &\mapsto \frac{x + e_n}{\|x + e_n\|^2} - \frac{1}{2} e_n \end{aligned}$$

eine surjektive Isometrie ist.

(b) Zeigen Sie, dass $x \mapsto -x$ eine Isometrie auf B^n bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle_{B^n}$ ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Für $u = (u_0, \dots, u_n), v = (v_0, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ seien

$$\langle u, v \rangle_{1,n} = u_0 v_0 - \sum_{j=1}^{n} u_j v_j,$$

$$X_{1,n}^+ = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x, \rangle_{1,n} = 1,\ x_0 > 0\}.$$

Wir versehen $T_x X_{1,n}^+$ mit der Einschränkung des inneren Produkts $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1,n}$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned}\psi : B^n &\to X_{1,n}^+\\ x &\mapsto \frac{1}{1-\|x\|^2}(1,x)\end{aligned}$$

eine bijektive Isometrie ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{SO}(1,n)^\circ$ auf $X_{1,n}^+$ transitiv und als Isometrien operiert.

Aufgabe 4 (1 Punkt)

Zeigen Sie, dass es ein $p \in \mathbb{H}^n$ gibt so dass für $G = \mathrm{SO}(1,n)^\circ = \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)^\circ$ gilt $\mathrm{Stab}_G(p) = \mathrm{SO}(n)$.

Abgabe in der Vorlesung am **Montag, den 22. Januar**.