

11. Übungsblatt (erschienen am 09.01.2024)

Aufgabe 11.1 (schriftliche Aufgabe)[3 Punkte]

Sei $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ eine Matrix mit $\text{Rang}(A) = n \leq m$, und $A = QR$ eine QR-Zerlegung von A . Wir zerlegen $Q = (Q_1, Q_2)$ mit $Q_1 \in \mathbb{C}^{m \times n}$ und $Q_2 \in \mathbb{C}^{m \times (m-n)}$. Zeigen Sie bitte:

- (a) $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(Q_1)$.
- (b) Die Spalten von Q_1 bilden eine Orthonormalbasis von $\mathcal{R}(A)$.
- (c) Die Spalten von Q_2 bilden eine Orthonormalbasis von $\mathcal{N}(A^*)$.

Aufgabe 11.2 (schriftliche Aufgabe)[3 Punkte]

Bestimmen Sie bitte, mithilfe von Householder-Transformationen die QR-Zerlegung der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bitte geben Sie in jedem Zwischenschritt die Vektoren v und die Householder-Transformation P an.

Aufgabe 11.3 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]

Betrachten Sie Algorithmus 4 aus dem Vorlesungsskript: Für eine nicht-injektive Matrix A kann es vorkommen, dass die erste Spalte x der Teilmatrix A_j der Nullvektor ist. Wir betrachten zwei Möglichkeiten:

- (a) Implementieren Sie zunächst die Funktion `[Q,R]=qr_decomp(A)`, die eine QR-Zerlegung für allgemeine Matrizen bestimmt, indem der Algorithmus die Nullspalte x überspringt.
- (b) In Bemerkung 2.38 im Skript ist ein beschrieben, das zusätzlich eine Zeilenpivotsuche durchführt: Im Falle einer Nullspalte x , soll diese mit der ersten nicht-Nullspalte von A_j getauscht werden. Falls A_j die Nullmatrix ist, soll der Algorithmus terminieren. Implementieren Sie dieses Verfahren in der Funktion `[Q,R,P]=qr_pivot(A)`, die resultierende Zerlegung soll also die Form $QR = AP$ mit einer Permutationsmatrix P haben.
- (c) Implementieren Sie die Funktion `evs = approximate_evs(A,n)`, welche die Eigenwerte der Matrix A mit n Schritten von Algorithmus 7 aus dem Skript approximiert.

Die Funktion `visualisiere_ev_approximation(@approximate_evs)` nutzt Ihre Implementation von `approximate_evs(A,n)`, um das Konvergenzverhalten der Methode darzustellen. Was beobachten Sie?

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu schriftlichen Aufgaben soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 16.01.2024 um 10:00 Uhr in Fach 17 abzugeben ist. Die Abgabe und Bearbeitung der schriftlichen Aufgaben darf in Zweiergruppen erfolgen.
- Zu Programmieraufgaben ist bis zum 16.01.2024 um 10:00 Uhr ein MATLAB-Quellcode zu schreiben, welcher in den **MATLAB-Grader** einzugegeben ist und dort automatisiert korrigiert wird. Die Abgabe wird gewertet und kann nicht mehr geändert werden, sobald Sie den Senden-Button klicken.
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.