Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2023/2024
18. Dezember 2023

Lie-Gruppen und Algebraische Gruppen
Prof. Dr. Martin Möller
Dr. Johannes Horn
Johannes Schwab
Nicole Müller

Übungsblatt 9

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ reell analytisch und nicht die Nullabbildung. Zeigen Sie, dass die Menge der Nullstellen von f auf jedem Würfel in $\mathbb{R}^n$ Lebesgue-Maß 0 hat.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass jedes Haarsche Maß auf $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ beidseitig invariant ist.

b) Wir betrachten $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ als n^2-dimensionalen Vektorraum über $\mathbb{R}$. Für jedes $x \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ sei L_x die Linksmultiplikation mit x. Zeigen Sie, dass $\det L_x = (\det x)^n$.

c) Sei $E_{i,j}$ die Matrix mit Eintrag 1 an der Stelle (i, j) und 0 sonst. Wir nehmen $\{E_{i,j}\}$ als Standardbasis von $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ und versehen den Raum mit dem entsprechenden Lebesgue-Maß.

   (i) Zeigen Sie, dass $\{x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid \det x = 0\}$ Lebesgue-Maß 0 hat.

   (ii) Folgern Sie, dass $|\det y|^{-n} dy$ ein Haarsches Maß auf $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Sei G eine kompakte Liegruppe.

a) Zeigen Sie: Die Liealgebra einer maximalen abelschen Untergruppe $T \subset G$ ist eine maximal abelsche Unterliealgebra $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$.

b) Sei G zusätzlich halbeinfach und $T \subset G$ maximal abelsch. Zeigen Sie, dass dann $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ eine Cartan-Unteralgebra ist.

c) Finden Sie maximale abelsche Untergruppen von $\mathsf{SU}(n)$ und $\mathsf{SO}(n, \mathbb{C})$.

Hinweis zu a): Sie dürfen verwenden, dass $\mathsf{Ad} \circ \exp = \exp \circ \mathsf{ad}$ für abstrakte Liegruppen.

Abgabe in der Vorlesung am **Montag, den 08. Januar 2024**.