Vorlesung Numerische Mathematik
Wintersemester 2023/24
Prof. Dr. Bastian von Harrach
M.sc Johannes Wagner

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

9. Übungsblatt (erschienen am 12.12.2023)

Aufgabe 9.1 (Votieraufgabe)

(a) Gegeben seien endlich viele Messdaten $t_1, \ldots, t_l \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ und $x_1, \ldots, x_l \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{N}$. Es wird vermutet, dass die Daten x_i in folgender Weise von den Daten t_i abhängen:

$$x(t) = \alpha_0 t^2 + \alpha_1 \pi \sin(2t) + \alpha_2 t \log(t) + \alpha_3,$$

mit gewissen Koeffizienten $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, 3$. Geben Sie das lineare Ausgleichsproblem zur näherungsweisen Bestimmung der Koeffizienten α_i an.

(b) Gehen Sie nun analog für einen vermuteten linearen Zusammenhang $x = a\,t + b$ vor, und bestimmen Sie so die Ausgleichsgerade durch die folgenden Datenpunkte:

t	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
x	3.72	4.1	5.37	5.9	6.8	7.6	8.0	8.7

Zeichnen Sie die Datenpunkte und die Ausgleichsgerade.

Aufgabe 9.2 (schriftliche Aufgabe)[3 Punkte]

Sei $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ eine gegebene Matrix mit $\operatorname{Rang}(A) = n$. Zeigen Sie:

(a) Die Matrix

$$\begin{pmatrix} I & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(m+n)\times(m+n)}$$

ist regulär.

(b) $\hat{x} \in \mathbb{C}^n$ ist genau dann eine Lösung des linearen Ausgleichsproblems

$$\text{minimiere } \|Ax - b\|$$

mit dem Residuum $\hat{r} = b - A\hat{x}$, wenn $(\hat{r}, \hat{x})$ das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} I & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

löst.

Aufgabe 9.3 (schriftliche Aufgabe)[3 Punkte]
Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitisch und positiv definit mit Cholesky-Zerlegung $A = LL^*$. Zeigen Sie, dass für die Matrix L der Cholesky-Zerlegung

$$L = (l_{ij})_{i,j=1}^n = \begin{cases} \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}\overline{l_{jk}}} & i = j \\ \frac{1}{l_{jj}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}\overline{l_{jk}}\right) & i > j \end{cases}$$

gilt. Wieso folgt damit die Eindeutigkeit der Cholesky-Zerlegung?

Aufgabe 9.4 (Programmieraufgabe)[4 Punkte]
Die Singulärwertzerlegung liefert ein einfaches Verfahren zur Komprimierung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, indem man Singulärwerte bis auf die ersten p auf 0 setzt. Für die Speicherung der resultierendes Approximationsmatrix $A_p = U_p\Sigma_p V_p^T$ benötigt man dann nur noch $np + mp + p$ Zahlen.

Implementieren Sie die `MATLAB`-Funktion `Ap = Matrixapproximation(A,p)`, welche für eine Matrix `A`, die beschriebene Approximation mit `p` Singulärwerten bestimmt. Sie dürfen die `MATLAB`-Funktion `svd` verwenden.

Die Matrix `A` enthält eine Matrixrepresentation des Goethe Universitätslogos. Bestimmen Sie eine komprimierte Version `A50`, welche $p = 50$ Singulärtwerte verwendet und benutzen Sie den vorhandenen Code, um die komprimierte Version als Bild auszugeben. Vervollständigen Sie den übrigen Code derart, dass für verschiedene Werte von p der relative Fehler

$$\texttt{relativer\_fehler} = \frac{\|A - A_p\|_q}{\|A\|_q}, \quad q \in \{1, 2, \infty\}.$$

in den verschiedenen Matrixnormen berechnet und logarithmisch gegenüber der Anzahl der Singulärwerte geplottet wird.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu schriftlichen Aufgaben soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 19.12.2023 um 10:00 Uhr in Fach 17 abzugeben ist. Die Abgabe und Bearbeitung der schriftlichen Aufgaben darf in Zweiergruppen erfolgen.
- Zu Programmieraufgaben ist bis zum 19.12.2023 um 10:00 Uhr ein MATLAB-Quellcode zu schreiben, welcher in den `MATLAB`-Grader einzugegeben ist und dort automatisiert korrigiert wird. Die Abgabe wird gewertet und kann nicht mehr geändert werden, sobald Sie den Senden-Button klicken.
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.