Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2023/2024
11. Dezember 2023

Lie-Gruppen und Algebraische Gruppen
Prof. Dr. Martin Möller
Dr. Johannes Horn
Johannes Schwab
Nicole Müller

Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass $\mathsf{so}(n, n+1)$ die spaltbare reelle Form und $\mathsf{so}(2n+1)$ die kompakte reelle Form von $\mathsf{so}(2n+1, \mathbb{C})$ sind.

Aufgabe 2 (8 Punkte)

In dieser Aufgabe wollen wir die Lie-Algebra $\mathfrak{g}_2$ konstruieren, welche zu dem Wurzelsystem G_2 korrespondiert. Dazu betrachten wir das G_2-Hexagon in Abbildung 1.
Die Kanten des Hexagons haben in jede Richtung ein anderes Gewicht. Falls für eine Richtung kein Gewicht angegeben ist ist das Gewicht per Konvention 1.
Sei V der $\mathbb{C}$-Vektorraum über den Knoten des Hexagons. Für jede Wurzel γ im Wurzelsystem G_2 definiere einen lineare Abbildung X_γ auf V, die einen Erzeuger v auf kw abbildet genau dann, wenn eine Kante von v nach w in Richtung γ von Gewicht k existiert und die v auf Null abbildet, falls keine Kante von v in Richtung γ existiert.

a) Zeigen Sie, dass für alle $\gamma \in \Delta$ der Operator $H_\gamma := [X_\gamma, X_-\gamma]$ diagonal ist bezüglich der gegebenen Basis. Zeigen Sie, dass die $\langle H_\gamma \mid \gamma \in \Delta \rangle$ zwei-dimensional ist.

b) Zeigen Sie, dass $\langle X_\gamma, H_\gamma \mid \gamma \in \Delta \rangle \subset \mathsf{End}(V)$ eine 14-dimensionale Liealgebra definiert.

c) Zeigen Sie, dass diese Liealgebra die komplexe einfache Liealgebra von Typ G_2 ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei G die Heisenberggruppe

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ & 1 & c \\ & & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Das Zentrum von G ist $Z(G) = \mathbb{R}$. Sei Γ die Untergruppe $\mathbb{Z} \subset Z(G) \subset G$.

a) Zeigen Sie, dass G/Γ eine Liegruppe ist.

b) Zeigen Sie, dass kein injektiver glatter Homomorphismus $\rho : G/\Gamma \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ existiert für alle n.

Abgabe in der Vorlesung am **Montag, den 18. Dezember 2023**.

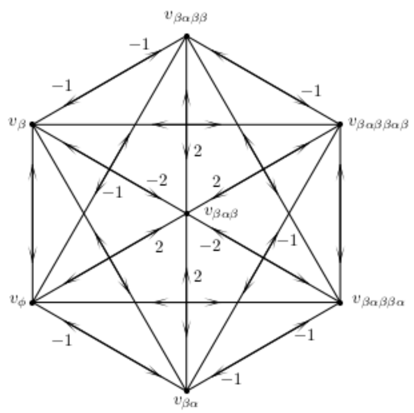

Figure 1: The G_2 Hexagon

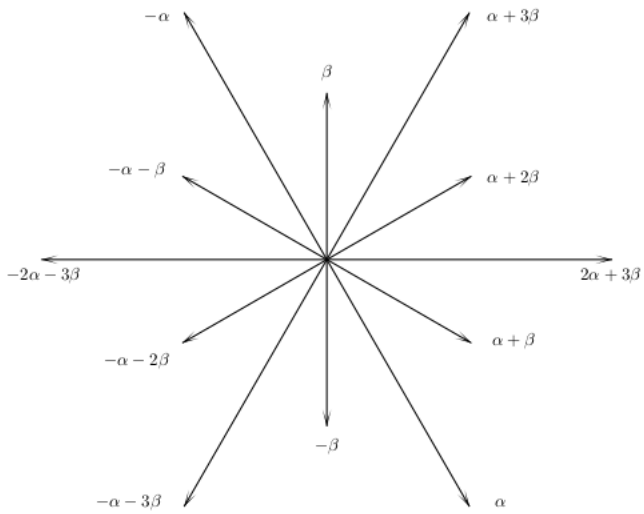

Figure 2: Roots of G_2

Abbildung 1: G_2