Vorlesung Numerische Mathematik
Wintersemester 2023/24
Prof. Dr. Bastian von Harrach
M.sc Johannes Wagner

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

8. Übungsblatt (erschienen am 5.12.2023)

Aufgabe 8.1 (Votieraufgabe)

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gegeben. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Für alle Matrizen $C \in \mathbb{R}^{m\times m}$ gilt

$$\operatorname{Rang}(CA) \leq \operatorname{Rang}(A).$$

Gleichheit gilt, wenn C regulär ist.

(b) Für alle Matrizen $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt

$$\operatorname{Rang}(AB) \leq \operatorname{Rang}(A),$$

und das Gleichheitszeichen gilt, wenn B regulär ist.

Aufgabe 8.2 (schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]

Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm in $\mathbb{C}^n$ und $\|\cdot\|_M$ die induzierte Matrixnorm in $\mathbb{C}^{n\times n}$. Zeigen Sie:

(a) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $\|A\|_M < 1$. Zeigen Sie, dass $(I+A)^{-1}$ existiert und die Ungleichung

$$\frac{1}{1+\|A\|_M} \leq \|(I+A)^{-1}\|_M \leq \frac{1}{1-\|A\|_M}$$

gilt.

(b) Seien $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ regulär, $b \in \mathbb{C}^n$, $b \neq 0$, und $x \neq 0$ die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$. Weiterhin seien $\Delta b \in \mathbb{C}^n$ und $\Delta A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $\|\Delta A\|_M \|A^{-1}\|_M < 1$. Zeigen Sie, dass

$$(A + \Delta A)\tilde{x} = b + \Delta b$$

eindeutig lösbar ist, und dass für die Lösung $\tilde{x} = x + \Delta x$ gilt:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\operatorname{cond}_M(A)}{1 - \operatorname{cond}_M(A)\frac{\|\Delta A\|_M}{\|A\|_M}} \cdot \left(\frac{\|\Delta A\|_M}{\|A\|_M} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\right).$$

Aufgabe 8.3 (Votieraufgabe)
Es sei $t \mapsto M(t) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine stetige Funktion, t, $t_0 \in \mathbb{R}$, wobei $M(t)$ nicht notwendigerweise regulär ist. Beweisen Sie:

(a) Sei $n = m$ und die Matrix $M(t_0)$ sei regulär. Dann existiert eine Umgebung U von t_0, sodass die Matrix $M(t)$ für alle $t \in U$ regulär ist.

(b) Sei nun $n \neq m$. Dann existiert eine Umgebung U von t_0, sodass

$$\operatorname{Rang}(M(t)) \geq \operatorname{Rang}(M(t_0))$$

für alle $t \in U$ gilt. Der Rang der Matrix M kann lokal also nicht kleiner werden.

(c) Geben Sie ein Beispiel einer stetigen, Matrix-wertigen Funktion an, für die der Rang nicht konstant ist.

Hinweis: Argumentieren Sie mit der Determinanten von $M(t)$ bzw. einer geeigneten Teilmatrix von $M(t)$.

Aufgabe 8.4 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]
Implementieren Sie die Funktion `L = Cholesky(A)`, die die Cholesky-Zerlegung für eine positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ berechnet. Sollte A nicht positiv definit sein, soll die Funktion als Ausgabe `L` $=$ `nan` liefern. Testen Sie Ihre Implementation indem Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 29 & 36 & 43 \\ 3 & 36 & 109 & 126 \\ 4 & 43 & 126 & 246 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

lösen.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu schriftlichen Aufgaben soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 12.12.2023 um 10:00 Uhr in Fach 17 abzugeben ist. Die Abgabe und Bearbeitung der schriftlichen Aufgaben darf in Zweiergruppen erfolgen.

- Zu Programmieraufgaben ist bis zum 12.12.2023 um 10:00 Uhr ein MATLAB-Quellcode zu schreiben, welcher in den `MATLAB`-Grader einzugegeben ist und dort automatisiert korrigiert wird. Die Abgabe wird gewertet und kann nicht mehr geändert werden, sobald Sie den Senden-Button klicken.

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.