Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2023/2024
27. November 2023

Lie-Gruppen und Algebraische Gruppen
Prof. Dr. Martin Möller
Dr. Johannes Horn
Johannes Schwab
Nicole Müller

Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Geben Sie die Dynkin-Diagramme und Cartan-Matrizen für die folgenden Wurzelsysteme an:

(a) A_n

(b) C_n

(c) G_2

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Ein Wurzelsystem $(\mathbb{R}^n, \langle .,. \rangle, \Delta)$ einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt *reduzibel*, falls eine Zerlegung $\Delta = \Delta_1 \sqcup \Delta_2$ existiert, sodass Δ_1 und Δ_2 orthogonal zueinander sind.

(a) Zeigen Sie: Wenn Δ reduzibel ist, lässt sich $\mathfrak{g}$ als direkte Summe $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ von Idealen $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ schreiben.

(b) Sei $\mathfrak{g}$ halbeinfach und $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ eine Zerlegung in Ideale. Des Weiteren sei $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan-Algebra von $\mathfrak{g}$.

  (i) Zeigen Sie, dass für alle $\alpha \in \Delta$ entweder $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}_1$ oder $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}_2$ gilt.

  (ii) Sei $\Delta_i = \{\alpha \in \Delta \mid \mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}_i\}$. Zeigen Sie, dass Δ_1 und Δ_2 orthogonal zueinander sind.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Struktur der Weyl-Gruppen unter der Verwendung von semidirekten Produkten von abelschen Gruppen und Permutationsgruppen für die folgenden Wurzelsysteme:

(a) A_n

(b) C_n

(c) G_2

Sie dürfen dazu verwenden: Die Weyl-Gruppe wird erzeugt von den Reflexionen in den einfachen Wurzeln.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Ein Gitter $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ heißt *gerade*, falls $\langle v, v \rangle \in 2\mathbb{Z}$ für alle $v \in \Gamma$. Ein *Wurzelgitter* ist ein gerades Gitter, das von den Wurzeln $R = \{v \in \Gamma \mid \langle v, v \rangle = 2\}$ erzeugt wird.

(a) Für ein Wurzelsystem $(\mathbb{R}^n, \langle .,. \rangle, \Delta)$ sei $\Gamma =< \Delta >_{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass Γ ein Gitter ist.

(b) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^n, \langle .,. \rangle, \Delta)$ bis auf Skalieren ein Wurzelgitter Γ definiert, wenn alle Wurzeln die gleiche Länge haben.

(c) Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ein Wurzelgitter mit Wurzeln R. Zeigen Sie, dass dann $(\mathbb{R}^n, \langle .,. \rangle, R)$ ein reduziertes Wurzelsystem ist.

Abgabe in der Vorlesung am **Montag, den 04. Dezember 2023**.