

## Übungsblatt 6

### Aufgabe 1 (4 Punkte)

Geben Sie die Dynkin-Diagramme und Cartan-Matrizen für die folgenden Wurzelsysteme an:

- (a)  $A_n$
- (b)  $C_n$
- (c)  $G_2$

### Aufgabe 2 (4 Punkte)

Ein Wurzelsystem  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle, \Delta)$  einer Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  heißt *reduzibel*, falls eine Zerlegung  $\Delta = \Delta_1 \sqcup \Delta_2$  existiert, sodass  $\Delta_1$  und  $\Delta_2$  orthogonal zueinander sind.

- (a) Zeigen Sie: Wenn  $\Delta$  reduzibel ist, lässt sich  $\mathfrak{g}$  als direkte Summe  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$  von Idealen  $\mathfrak{g}_1$  und  $\mathfrak{g}_2$  schreiben.
- (b) Sei  $\mathfrak{g}$  halbeinfach und  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$  eine Zerlegung in Ideale. Des Weiteren sei  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  eine Cartan-Algebra von  $\mathfrak{g}$ .
  - (i) Zeigen Sie, dass für alle  $\alpha \in \Delta$  entweder  $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}_1$  oder  $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}_2$  gilt.
  - (ii) Sei  $\Delta_i = \{\alpha \in \Delta \mid \mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}_i\}$ . Zeigen Sie, dass  $\Delta_1$  und  $\Delta_2$  orthogonal zueinander sind.

### Aufgabe 3 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Struktur der Weyl-Gruppen unter der Verwendung von semidirekten Produkten von abelschen Gruppen und Permutationsgruppen für die folgenden Wurzelsysteme:

- (a)  $A_n$
- (b)  $C_n$
- (c)  $G_2$

Sie dürfen dazu verwenden: Die Weyl-Gruppe wird erzeugt von den Reflexionen in den einfachen Wurzeln.

### Aufgabe 4 (4 Punkte)

Ein Gitter  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  heißt *gerade*, falls  $\langle v, v \rangle \in 2\mathbb{Z}$  für alle  $v \in \Gamma$ . Ein *Wurzelgitter* ist ein gerades Gitter, das von den Wurzeln  $v \in \Gamma$  mit  $\langle v, v \rangle = 2$  erzeugt wird.

- (a) Für ein Wurzelsystem  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle, \Delta)$  sei  $\Gamma = \langle \Delta \rangle_{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}^n$ , wobei  $\Delta$  von der Menge  $R = \{v \in \Gamma \text{ mit } \langle v, v \rangle = 2\}$  erzeugt wird. Zeigen Sie, dass  $\Gamma$  ein Gitter ist.
- (b) Zeigen Sie, dass  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle, \Delta)$  ein Wurzelgitter  $\Gamma$  definiert, wenn alle Wurzeln die gleiche Länge haben.
- (c) Sei  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  ein Wurzelgitter mit Wurzeln  $R$ . Zeigen Sie, dass dann  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle, R)$  ein reduziertes Wurzelsystem ist.