

Vorlesung  
**Lie-Gruppen und Gitter**  
Wintersemester 2023/24

Welche Untergruppen hat  $GL_n(\mathbb{R})$  oder  $GL_n(\mathbb{C})$ ? Natürlich kann man die Permutationsgruppen und damit jede endliche Gruppe in  $GL_r(\mathbb{R})$  einbetten. Wenn man sich auf abgeschlossene zusammenhängende Untergruppen einschränkt, so ist dies die Frage nach der Klassifikation von Lie-Gruppen (oder präziser von Matrix-Lie-Gruppen). Beispiele hierfür sind orthogonale Gruppen oder unitäre Gruppen. Der erste Teil der Vorlesung behandelt fundamentale Eigenschaften von Lie-Gruppen bis hin zur Klassifikation von sogenannten einfachen Lie-Gruppen mit Hilfe von Wurzelsystemen.

In  $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$  oder allgemeiner in  $\mathbb{R}^n$  gibt es diskrete kokompakte Untergruppen, welche man auch Gitter nennt. Wenn man  $\mathbb{C}$  oder  $\mathbb{R}^n$  als Gruppe von strikten oberen Dreiecksmatrizen auffasst, ist es eine naheliegende und wichtige Frage, in welchen Lie-Gruppen es Gitter gibt. Wir werden sehen, wie man durch arithmetische Konstruktionen sogenannte arithmetische Gitter bekommt, um die es im zweiten Teil der Vorlesung geht. Um auch das Beispiel  $SL_n(\mathbb{Z})$  in  $SL_n(\mathbb{R})$  mitaufzunehmen, werden wir den Gitterbegriff mit Hilfe des Haarschen Maßes auf Liegruppen verallgemeinern. Vielleicht werden wir am Ende der Vorlesung zeigen können, dass im Gegensatz zu  $\mathbb{R}^n$ , Gitter in Lie-Gruppen wie  $SL_n(\mathbb{R})$  für  $n > 2$  starr sind, also nicht deformiert werden können.

1. **Klassische Liegruppen und Beispiele für Gitter** (16.10.23)

Definition von Matrixliegruppen ('closed linear groups'). Definition von abstrakten Liegruppen [Kna02, §Intro.4]. Definition komplexer Liegruppen [Kna02, §I.11].

Beispiele: Diagonalmatrizen (Tori), strikte obere Dreiecksmatrizen (unipotente Gruppen). Die klassischen komplexen halbeinfachen Liegruppen  $SL_n(\mathbb{C})$ ,  $SO_n(\mathbb{C})$  und  $Sp_n(\mathbb{C})$ . Kompakte Liegruppen  $SO(n)$ ,  $SU(n)$ . Nichtkompakte reelle halbeinfache Liegruppen  $SL_n(\mathbb{R})$ ,  $SO(p, q)$ ,  $SU(p, q)$ . [Mor15, §I.17]

Die Lie-Algebra einer Matrix-Liegruppe [Kna02, §Intro.1] ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

Ein Überblick über das grobe Programm des Semesters: Klassifikation von halbeinfachen Lie-Algebren und halbeinfachen Liegruppen, Wurzelsysteme [Kna02, §II und §VI]. Symmetrische Räume und lokalsymmetrische Räume (' $K \backslash G / \Gamma$ ') als Parameterräume (z.B. für abelsche Varietäten). [Mor15, §1]. Haarsches Maß [Kna02, §VIII.3], [Mor15, §A.3]. Definition von Gitter also kokompakte bzw. koendliche diskrete Untergruppen. Beispiele für arithmetische Gitter [Mor15, §3 und §7]. Starrheitssätze.

## 2. Lie-Algebra, Exponentialabbildung (19.10.23)

Eigenschaften der Lieklammer, abstrakte Definition einer Lie-Algebra. Eigenschaften der Exponentialabbildung. Standardvertreter für Kurven in Matrixliegruppen.

Beweis, dass Matrixliegruppen wirklich Liegruppen sind [Kna02, Theorem 0.15]: Eindeutigkeit und vorbereitendes Lemma.

## 3. Homomorphismen von Matrix-Liegruppen [Kna02, §0.5] (23.10.23)

Ende des Beweises: Matrixgruppen sind Liegruppen. Satz:  $\pi : G \rightarrow H$  glatter Homomorphismus, dann definiert das Differential bei 1 einen Liealgebrenhomomorphismus. Satz:  $\pi \circ \exp_G = \exp_H \circ \pi$  [Kna02, Theorem 0.23].

## 4. Abstrakte Liealgebren [Kna02, §I.1, §I.2] (26.10.23)

Korollar aus letztem Satz: Falls  $d\pi$  injektiv/surjektiv/bijektiv ist, dann ist  $\pi$  injektiv in einer Umgebung der 1. Es ist  $H^o \subset \text{Bild}(\pi)$  und  $\pi$  ist lokaler Isomorphismus [Kna02, Corollary 0.26].

Definition Liealgebra über  $k$ . Beispiele: abelsche Liealgebren, assoziative Algebra wird Liealgebra mit Kommutator, Matrix-Liealgebren, eindimensionale Liealgebren, zweidimensionale Liealgebren,  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ .

Grundlegende algebraische Konzepte: Unterliealgebra, Ideal, Homomorphismus, Isomorphismus, Quotientenliealgebra, Kern, Bild, Isomorphiesatz. Proposition: Summe, Schnitt, Kommutator von Idealen ist Ideal [Kna02, Prop. 1.7.].

Kommutatorreihe, untere Zentralreihe, Definition auflösbar, nilpotent. Beispiel (strikte) obere Dreiecksmatrizen.

## 5. Cartans Kriterium für Halbeinfachheit [Kna02, Theorem 1.45] (30.10.23)

Einfache und halbeinfache Liealgebren (im Sinne: keine nichttrivialen Ideale). Halbeinfachheit ist äquivalent zu Summe von einfachen Liealgebren [Kna02, Theorem 1.54]. (Eine Implikation ist formal, die zweite dient als Motivation für Cartans Kriterium.)

Killing-Form, Radikal einer Bilinearform. Aussage von Cartans Kriterium für Halbeinfachheit [Kna02, Theorem 1.45] und für Auflösbarkeit [Kna02, Proposition 1.46].

Aus [Kna02, Proposition 1.46] folgt 'alles': Radikal der Killing-Form ist im Radikal der Liegruppe. Damit folgt das Halbeinfachheitskriterium formal mit Matrizenrechnung.

## 6. Cartans Kriterium für Auflösbarkeit [Kna02, Proposition 1.46] (02.11.23)

Für die Umkehrung Beweis des Auflösbarkeitskriteriums: Körpererweiterung von Liealgebren beeinflusst Auflösbarkeit und Radikalinklusion nicht [Kna02, Proposition 1.17 und S. 52 oben].

Liealgebrendarstellungen [Kna02, Kapitel I.5] und der Satz von Lie (Auflösbare Liegruppen sind in jeder Darstellung obere Dreiecksmatrizen nach geeigneter Basiswahl, Aussage ohne Beweis) [Kna02, Theorem 1.25 bzw. Korollar 1.29]. Damit wird eine Implikation des Auflösbarkeitskriteriums bewiesen.

Satz von Engel (ohne Beweis): Ein Unterliealgebra der Endomorphismenalgebra ist nilpotent genau dann wenn jedes Element nilpotent ist [Kna02, Theorem 1.35]. Insbesondere ist sie zu einer Unteralgebra der strikten oberen Dreiecksmatrizen konjugiert.

Satz über die Jordannormalform (Diagonalisierbar plus Nilpotent) mit Eindeutigkeitsaussage und polynomialer Darstellbarkeit.

Damit wird die andere Implikation des Auflösbarkeitskriteriums bewiesen.

## 7. Reduktive Lie-Algebren, Beispiele, Motivation für Klassifikation (06.11.23)

Definition reduktiver Lie-Algebren, das Kriterium in [Kna02, Proposition 1.59]. Die Liealgebren zu klassischen Liegruppen sind reaktiv. Halbeinfachheit folgt durch Zentrumsbestimmung ggf. nach Übergang zu Spur Null.

(Die Vorlesung geht weiter mit der Klassifikation von halbeinfachen Liealgebren [Kna02, Kapitel II]. Zu (fast) all diesen Liealgebren kennen wir klassische Liegruppen mit der entsprechenden Liealgebra. Die Struktur der Lie-Algebra gibt dann Rückschlüsse über die Gruppenstruktur. Für Matrixliegruppen geschieht dies über die Exponentialabbildung. Für abstrakte Liegruppen ist [Kna02, Kapitel I.10]. Besser steht das in [Bum13], Kapitel 6-8 und Kapitel 14, insbesondere Theorem 14.2.)

Reelle Formen von Liealgebren. Das Beispiel  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  hat die reellen Formen  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$  und  $\mathfrak{su}(n)$ .

Wurzelraumzerlegung am Beispiel  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ .

## 8. Cartan-Unteralgebren und Wurzelraumzerlegung (09.11.23)

Fortsetzung des Beispiels  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ : Kriterium für Einfachheit.

Definition von Cartan-Algebren für halbeinfache Liegruppen als maximal abelsche Unteralegebren, deren ad-Operation diagonalisierbar ist.

Wurzelraumzerlegung bezüglich einer Cartan-Unteralgebra und Kommutatorregeln für Wurzelraumzerlegung.

(Die Reihenfolge weicht von [Kna02] ab: Dieser Zugang gibt schneller das Wesentliche, die Wurzelraumzerlegung. [Kna02] behandelt allgemeiner Cartan-Unteralgebren von komplexen Liegruppen. Die nächste Vorlesung, insbesondere [Kna02, Proposition 2.13 und Corollary 2.23] zeigen dann, dass die beiden Definitionen im halbeinfachen Fall übereinstimmen.)

## 9. Eindeutigkeit von Cartan-Unteralgebren (13.11.23)

Bei der Wurzelraumzerlegung bzgl. einer Cartan-Unteralgebra ist der Nulleigenraum gleich der Cartan-Unteralgebra (Argumente von [Kna02, Proposition 2.13]).

Automorphismengruppen von Liealgebren und innere Automorphismen [Kna02, Kapitel I.11].

Reguläre Elemente einer Liealgebra bezüglich einer Darstellung [Kna02, Kapitel II.2].

Cartan-Unteralgebren sind bis auf innere Automorphismen eindeutig. Insbesondere ist deren Dimension eine Invariante, der Rang der Liealgebra [Kna02, Kapitel II.3].

## 10. Abstrakte Wurzelsysteme (16.11.23)

Beweis von: Cartan-Unteralgebren sind bis auf innere Automorphismen eindeutig. Dabei wurde ohne Beweis verwendet, dass  $g_{O,Y}$  für reguläre Elemente von  $\mathfrak{g}$  bzgl. der adjungierten Darstellung Cartan-Algebren bilden (dies ist [Kna02, Theorem 2.9' und Corollary 2.23]).

Definition eines (reduzierten) abstrakten Wurzelsystems.

Komplexe halbeinfache Liealgebren geben ein reduziertes Wurzelsystem [Kna02, Theorem 2.42]. Beginn des Beweis durch Angabe einer Bilinearform auf dem Spann der Wurzeln. Eigenräume sind eindimensional und echte positive Vielfache von Wurzeln sind keine Wurzeln. [Kna02, Proposition 2.21].

## 11. Wurzelsysteme zu halbeinfachen Liealgebren (20.11.23)

Fortsetzung des Beweises von [Kna02, Theorem 2.42]. Ad-Operation auf Ketten von Wurzeln und Eigenschaften von  $\mathfrak{sl}_2$ -Darstellungen ([Kna02, Theorem 1.66 und Theorem 1.67] ohne Beweis importiert) geben das Rationalitätsaxiom und das Spiegelungsaxiom.

Positivitätsbegriff auf Wurzelsystem, einfache Wurzeln. Es gibt eine Basis aus einfachen Wurzeln und jede Wurzel ist total positiv oder total negativ dargestellt in solch einer Basis.

## 12. Cartan-Matrix und Dynkin-Diagramm (23.11.23)

Cartan-Matrix assoziiert zu einem Wurzelsystem mit Positivitätsbegriff. Definition der abstrakte Cartan-Matrix. Proposition: Die Cartan-Matrix zu einem Wurzelsystem ist eine abstrakte Cartan-Matrix [Kna02, Prop 2.52.]. Beispiel:  $B_n$ .

Definition des Dynkin-Diagramms zu einer abstrakten Cartan-Matrix  $A$  nach Wahl von Diagonalmatrix  $D$  mit  $DAD^{-1}$  symmetrisch und positiv definit. Beispiel:  $B_n$ . Definition der Irreduzibilität der Cartan-Matrix. Wohldefiniertheit des Dynkin-Diagramms bis auf Äquivalenz [Kna02, Lemma 2.56]. Das Dynkin-Diagramm bestimmt die Cartan-Matrix eindeutig [Kna02, Ende von II.5].

## Literatur

- [Bum13] Daniel Bump. *Lie groups*. Second. Bd. 225. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2013, S. xiv+551.
- [Kna02] Anthony W. Kna. *Lie groups beyond an introduction*. Second. Bd. 140. Progress in Mathematics. Birkhäuser, Boston, 2002, S. xviii+812.
- [Mor15] Dave Witte Morris. *Introduction to arithmetic groups*. Deductive Press, [place of publication not identified], 2015, S. xii+475.