Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2023/2024
16. November 2023

Lie-Gruppen und Algebraische Gruppen
Prof. Dr. Martin Möller
Dr. Johannes Horn
Johannes Schwab
Nicole Müller

Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Berechnen und zeichnen Sie die Wurzelsysteme der folgenden Lie-Algebren:

(a) $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$

(b) $\mathfrak{sp}_2(\mathbb{C})$

(c) $\mathfrak{sl}_4(\mathbb{C})$

Hinweise:

- Verwenden Sie für (a) und (c) die Aussage von Blatt 3 Aufgabe 2.
- Für (b) können Sie annehmen, dass die Killling-Form für $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})$ die folgende Gestalt hat: $B(X,Y) = (2n+2)\cdot \mathrm{Tr}(XY)$

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Wir betrachten die Lie-Algebra $\mathfrak{g}_2$. Diese ist gegeben durch das Wurzelsystem $\mathfrak{G}_2 = (V, \langle .,. \rangle, \Delta)$. Hierbei ist $V = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle v, e_1 + e_2 + e_3 \rangle = 0\}$, $\langle .,. \rangle$ das vom Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ erzeugte Skalarprodukt und $\Delta = \{\pm(e_1 - e_2), \pm(e_2 - e_3), \pm(e_1 - e_3)\}$
$\cup \{\pm(2e_1 - e_2 - e_3), \pm(2e_2 - e_1 - e_3), \pm(2e_3 - e_1 - e_2)\}$.

(a) Zeichnen Sie das Wurzelsystem.

(b) Zeigen Sie zusätzlich, dass es sich bei $\mathfrak{G}_2$ um ein Wurzelsystem handelt.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_\alpha$ eine Wurzelraumzerlegung für eine komplexe halbeinfache Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Sei des Weiteren Δ' eine Teilmenge von Δ, die ein Wurzelsystem in $\mathfrak{h}_0^*$ bildet.
Zeigen Sie an einem Beispiel, dass $\mathfrak{s} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta'} \mathfrak{g}_\alpha$ nicht eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ sein muss.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Zusatzaufgabe: „$\mathfrak{sl}_2$-Darstellungen sind immer und überall“
Wir betrachten QM den Vektorraum der Quasi-Modulformen. Gegeben seien die folgenden Operatoren:

$$D(\phi) = \frac{1}{2\pi i}\frac{d\phi}{d\tau} \quad \text{für } \phi \in QM, \qquad W(\phi) = k\phi \quad \text{für } \phi \in QM \text{ vom Gewicht } k$$
$$\text{und} \quad \mathfrak{d}(\phi) = 12F'(P) \quad \text{für } \phi = F(P) \in QM,$$

wobei F ein Polynom mit Koeffizienten in Modulformen ist und $P = -24G_2$.

(a) Zeigen Sie, dass D, W und $\mathfrak{d}$ Derivationen auf dem Vektorraum der Quasi-Modulformen sind.

(b) Beweisen Sie außerdem die folgenden Relationen bezüglich des Kommutators:

$$[W, D] = 2D, \qquad [W, \delta] = -2\delta, \qquad [\delta, D] = W$$

(c) Weisen Sie nach, dass QM somit zu einer $\mathfrak{sl}_2$-Darstellung wird.

Abgabe in der Vorlesung am **Montag, den 25. November 2023**.