GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

5. Übungsblatt (erschienen am 14.11.2023)

Aufgabe 5.1 (Votieraufgabe)

Eine m-punktige Quadraturformel

$$G_m[f;w] := \sum_{i=1}^{m} w_i f(x_i) \approx \int_a^b f(x)w(x)\mathrm{d}x,$$

mit Knoten $x_1 < x_2 < \cdots < x_m \in [a,b]$ heißt m-stufige Gauß-Formel zu der Gewichtsfunktion w genau dann, wenn $G_m[\cdot;w]$ den Exaktheitsgrad $2m-1$ hat. In der Vorlesung wurden die Gauß-Legendre Quadraturformeln zur näherungsweisen Berechnung des Integrals $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ besprochen. Seien nun $w_i^{[-1,1]}$ und $x_i^{[-1,1]}$ die Gewichte und Knoten dieser in der Vorlesung hergeleiteten Gauß-Formel zum Intervall $[-1,1]$ und Gewichtsfunktion $w(x)=1$. Wie lauten die Gewichte und Knoten der Gauß-Formel zu einem allgemeinen Intervall $[a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, mit Gewichtsfunktion $w(x)=1$?

Aufgabe 5.2 (schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]

Aus der Vorlesung und den Übungen kennen Sie bereits die Gauß-Formeln zu $w \equiv 1$ (Gauß-Legendre-Formel) und $w = (1-x^2)^{-1/2}$ (Gauß-Tschebyscheff-Formel).

(a) Bestimmen Sie die Knoten und die Gewichte der zweistufigen Gauß-Formel zur näherungsweisen Berechnung von

$$I[f;1-x] = \int_0^1 f(x)(1-x)\mathrm{d}x.$$

(b) Konstruieren Sie eine Quadraturformel zur Approximation des Integrals $\int_\Delta f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ einer Funktion f über dem Dreieck $\Delta := \{(x,y) \mid 0 \le x, y \le 1,\ x+y \le 1\}$.
Verwenden Sie dazu den Satz von Fubini und approximieren Sie anschließend zunächst das innere und dann das äußere Integral durch geeignete zweipunktige Gauß-Formeln. Verwenden Sie dabei auch den Aufgabenteil (a).

Aufgabe 5.3 (Votieraufgabe)
Für $n \in \mathbb{N}$ seien $f_n, f \in C([a,b])$, $a < b$. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere gleichmäßig gegen f.

(a) Es sei $Q_m[f] = \sum_{i=1}^m w_i f(x_i)$ eine Quadraturformel zur Berechnung von $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ mit positiven Gewichten w_i. Die Gewichte seien gemäß Satz 1.9, Vorlesungsskript, bestimmt. Zeigen Sie, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\Big|Q_m[f_n - f]\Big| \leq |b-a| \cdot \|f_n - f\|_{[a,b]}.$$

(b) Man beweise, dass für jede Quadraturformel $Q[\cdot]$ gilt:

$$Q[f_n] \to Q[f] \quad \text{für } n \to \infty.$$

(c) Zeigen Sie mit dem Approximationssatz von Weierstraß, dass jede Quadraturformel $Q_m[\cdot]$ mit positiven Gewichten w_i, welche entsprechend Satz 1.9, Vorlesungsskript, bestimmt sind, konvergiert:

$$Q_m[f] \to \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{für } m \to \infty.$$

Aufgabe 5.4 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]

1. (Golub-Welsh Algorithmus) Implementieren Sie in der Funktion `GolubWelsh(f,m)` den Golub-Welsh Algorithmus zur numerischen Berechnung von

$$\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

entsprechend Satz 1.26 aus der Vorlesung. Zur Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A kann die `MATLAB`-Funktion `[V,D] = eig(A)` verwendet werden.

2. (Monte-Carlo Verfahren) In der Funktion `MonteCarlo(f,a,b,m)` soll eine einfache Version des Monte-Carlo Verfahrens zur numerischen Approximation von $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ implementiert werden, und zwar die Quadraturformel

$$Q[f] = \frac{(b-a)}{m} \sum_{i=1}^m f(x_i)$$

mit „gewürfelten" Stützstellen x_i. Genauer sollen die x_i gleichverteilt auf dem Integrationsintervall $[a,b]$ liegen. Dies kann in `MATLAB` mithilfe der `MATLAB`-Funktion `rand` realisiert werden.

3. Verwenden Sie Ihre Implementation von Aufgabe 1.3, oder implementieren Sie erneut die Funktion `Trapez(f,a,b,m)`, welche die zusammengesetzte Trapezformel auf m Knoten berechnet.

Die Funktion `Quadratur_vergleich` nutzt Ihre Implementationen der drei Quadraturverfahren `GolubWelsh`, `MonteCarlo` und `Trapez`, um das Integral $\int_{-1}^1 \sin(\frac{7}{4}\pi x + \frac{1}{4}\pi)\,\mathrm{d}x$ für verschiedene Werte von m zu berechnen. Anschließend wird der absolute Integrationsfehler der unterschiedlichen Verfahren gegenübergestellt. Zum Vergleich wird außerdem die Funktion $\frac{1}{\sqrt{m}}$ geplottet.
(Aufruf: `Quadratur_vergleich(@GolubWelsh, @MonteCarlo, @Trapez)`)

Wie schneiden die Verfahren im Vergleich ab? Speichern Sie die Platzierung der Verfahren in den Variablen `Platzierung_GolubWelsh`, `Platzierung_MonteCarlo` und `Platzierung_Trapez`, wobei das Verfahren mit dem niedrigsten Fehler den ersten Platz belegen und den Wert 1 bekommen soll, das zweitplatzierte Verfahren den Wert 2, usw.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu schriftlichen Aufgaben soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 21.11.2023 um 10:00 Uhr in Fach 17 abzugeben ist. Die Abgabe und Bearbeitung der schriftlichen Aufgaben darf in Zweiergruppen erfolgen.
- Zu Programmieraufgaben ist bis zum 21.11.2023 um 10:00 Uhr ein MATLAB-Quellcode zu schreiben, welcher in den `MATLAB`-Grader einzugegeben ist und dort automatisiert korrigiert wird. Die Abgabe wird gewertet und kann nicht mehr geändert werden, sobald Sie den Senden-Button klicken.
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.