Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2023/2024
13. November 2023

Lie-Gruppen und Algebraische Gruppen
Prof. Dr. Martin Möller
Dr. Johannes Horn
Johannes Schwab
Nicole Müller

Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Betrachten Sie die Lie-Algebra $\mathfrak{so}(4,\mathbb{C})$ und deren Unteralgebra $\mathfrak{h}$, die gegeben ist durch Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & -b & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{h}$ eine Cartan-Algebra ist, indem Sie die Wurzelraumzerlegung angeben.

(b) Nutzen Sie die Wurzelraumzerlegungen, um zu zeigen, dass $\mathfrak{so}(4,\mathbb{C})$ und $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ isomorph sind.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

(a) Geben Sie einen surjektiven Homomorphismus von $SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$ nach $SO(4,\mathbb{C})$ an.

(b) Was ist der Kern dieser Abbildung?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $\mathfrak{g}$ eine komplexe halbeinfache Lie-Algebra mit Cartan-Algebra $\mathfrak{h}$ und Wurzelraumzerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_\alpha$. Hier bezeichnet Δ die Menge der Wurzeln. Des Weiteren soll B die dazugehörige Killing-Form sein.
Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Falls α und β Elemente in $\Delta \cup \{0\}$ sind und $\alpha + \beta \neq 0$, dann ist $B(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = 0$.

(b) Sollte α in $\Delta \cup \{0\}$ liegen, so ist B nicht-singulär auf $\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha}$.

Abgabe in der Vorlesung am **Montag, den 20. November 2023**.