Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2023/2024
6. November 2023

Lie-Gruppen und Algebraische Gruppen
Prof. Dr. Martin Möller
Dr. Johannes Horn
Johannes Schwab
Nicole Müller

Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Gegeben sei die Lie-Algebra $\mathfrak{g} = \langle X, Y \rangle$ mit Lie-Klammer $[X, Y] = Y$ und Killing-Form B. Zeigen Sie, dass $rad(B) \subsetneq rad(\mathfrak{g})$ ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $\mathfrak{g}$ eine komplexe Matrix-Lie-Algebra, die einfach über $\mathbb{C}$ ist. Des Weiteren sei $C(X, Y)$ gegeben durch $C(X, Y) := \mathrm{Tr}(XY)$ für $X, Y \in \mathfrak{g}$.
Zeigen Sie, dass C gerade die Killing-Form multipliziert mit einem Skalar ist.

Hinweis: Nutzen Sie, dass eine bilineare Form B auf einem Vektorraum V eine lineare Abbildung $V \to V^*$ induziert. Diese ist ein Isomorphismus, wenn B nicht ausgeartet ist.
Darüber hinaus ist die ad-Invarianz der Killing-Form von Nutzen.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Die Quaternionen $\mathbb{H}$ sind die assoziative Divisionsalgebra über $\mathbb{R}$ mit der Basis $1, i, j, k$, sodass

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Die Konjugation ist definiert durch $\overline{a + bi + cj + dk} = a - bi - cj - dk$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathsf{gl}(n, \mathbb{H}) = \mathsf{Mat}(n, \mathbb{H})$ und

$$\mathsf{sp}(n) = \{X \in \mathsf{gl}(n, \mathbb{H}) \mid X^* + X = 0\}$$

mit dem Kommutator reelle Lie-Algebren bilden.

(b) Sei $M = A + Bi + Cj + Dk \in \mathsf{gl}(n, \mathbb{H})$. Definiere $Z_1(M) = A + iB$ und $Z_2(M) = C - iD$ sowie

$$Z(M) = \begin{pmatrix} Z_1(M) & -\overline{Z_2(M)} \\ Z_2(M) & \overline{Z_1(M)} \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass dies einen injektiven Lie-Algebrenhomomorphismus $Z : \mathsf{gl}(n, \mathbb{H}) \to \mathsf{gl}(2n, \mathbb{C})$ definiert.

(c) Zeigen Sie, dass dieser Homomorphismus einen Isomorphismus $\mathsf{sp}(n) \cong \mathsf{sp}(2n, \mathbb{C}) \cap \mathsf{u}(2n)$ liefert.

(d) Zeigen Sie außerdem, dass $\mathsf{sp}(n)$ reduktiv ist.

Abgabe in der Vorlesung am **Montag, den 13. November**.